

# Modélisation des écoulements granulaires gravitaires

R. Delannay



# Plan du cours

1. Introduction
2. Des milieux très discrets
3. Du discret au continu
4. L'approche phénoménologique

# Introduction



# Matériaux granulaires

- “A **granular material** is a conglomeration of discrete solid, macroscopic particles characterized by a loss of energy whenever the particles interact “(Wikipedia)
- Système athermique :  $k_B T \ll E_{\text{typique}} \approx mgd$  ( $d$  : taille typique)  
(rapport : 1 pour  $d = 1\mu\text{m}$ ,  $10^{-12}$  pour  $d = 1\text{mm}$ )
- Les matériaux granulaires dont on parlera ici sont dits secs :
  - effets capillaires,
  - fluide environnant
  - interactions électrostatiques
  - Van der Waals

**Effet négligeable devant celui de la gravité**
- Ceci exclut les poudres (diamètre  $< 100\mu\text{m}$ ).



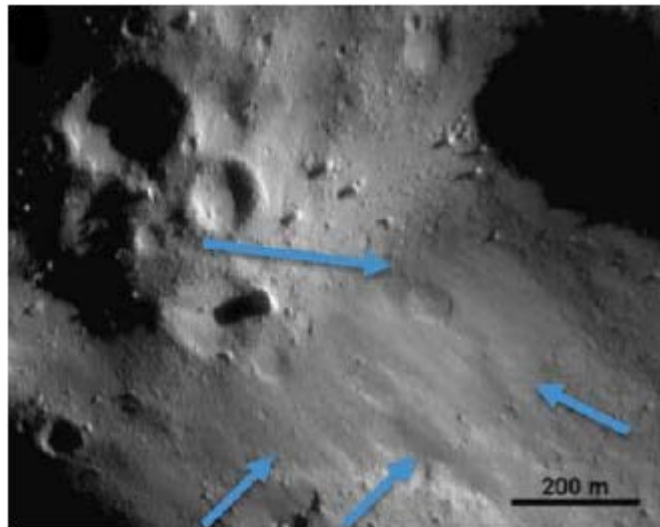
- On en trouve ici ...



Nature, 387 (1997)

- Comme ailleurs

Migration de  
régolithes sur  
Eros



Astéroïde



# Matériaux naturels omniprésents

- Exemple : sable : (10% de la surface des terres émergées) + sous sol + marges océaniques...
- Constituant mais aussi facteur d'évolution :
  - Stratification des roches, sables, sédiments
  - Ensablement, déplacement des cours d'eau
  - Érosion (avalanches, entrainement par les eaux et le vent)
  - Formation et déplacement des dunes
- Facteurs de risques naturels (Avalanches, séismes, glissements de terrain) provoquent d'importants dégâts
- Difficultés à garantir la stabilité des sols

# Matériaux granulaires en écoulement gravitaire

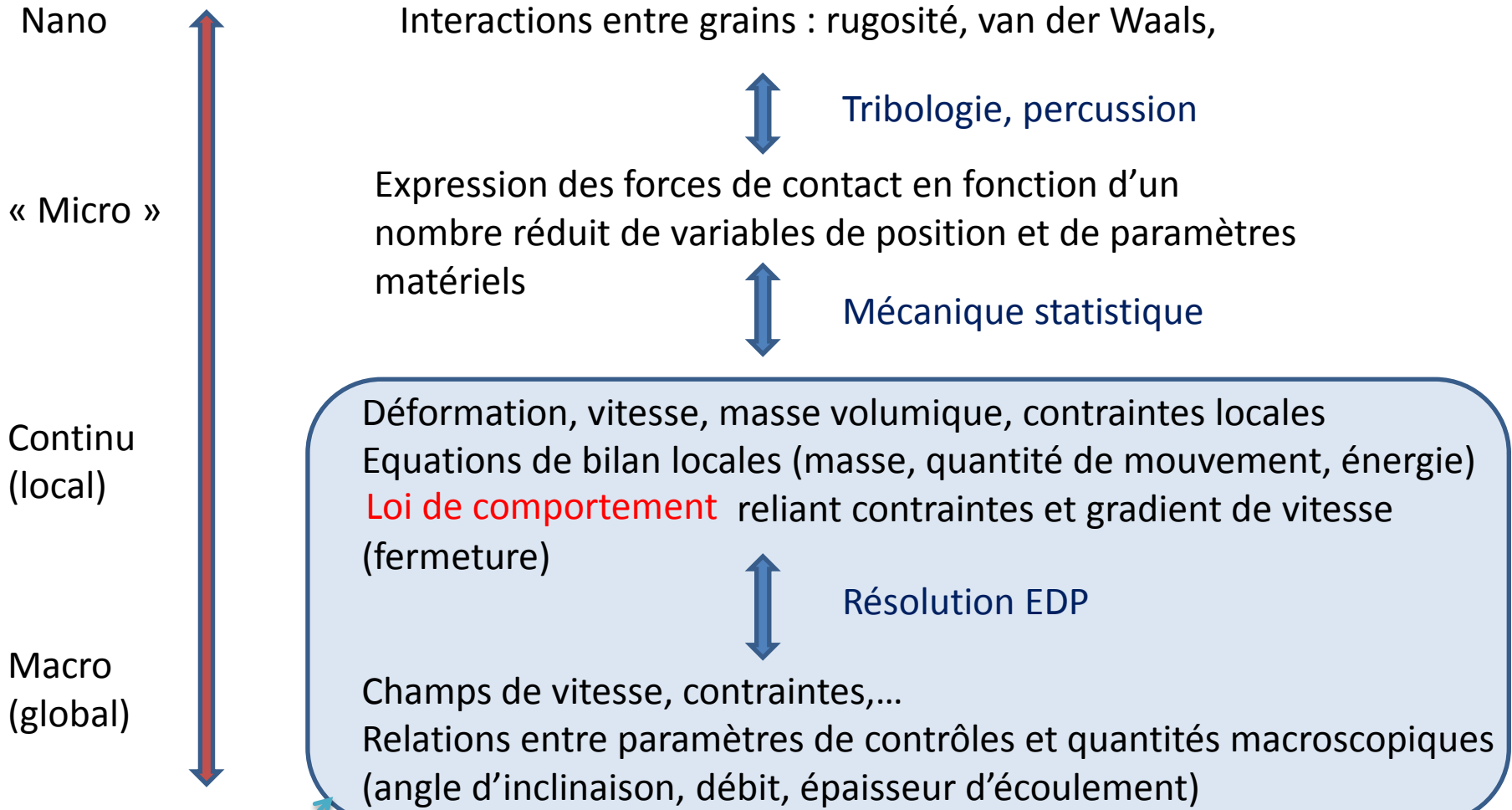
- Collection de particules solides (nombre de particules  $1 \ll N \ll N_b$  Avogadro) soumises :
  - à l'action de la pesanteur (force à longue portée)
  - aux interactions dissipatives pendant le contact (forces à courte portée) : frottement solide, collisions inélastiques
- Systèmes macroscopiques présentant des effets collectifs mais échappent au champ de la physique statistique « normale » :
  - $N$  trop petit
  - Système dissipatif (équilibre = repos)  $\Rightarrow$  mécanique statistique hors équilibre
  - Frottement solide : non-linéaires, contact unilatéral, glissement  $\Rightarrow$  hystérésis, effets mémoire, ...

# Discret et continu

- Variables « macroscopiques » décrivant l'état du système = champs continus :
  - champ de vitesses
  - Champ de contraintes (pression, cisaillement)
  - + leurs gradients, fluctuations, ...
- Ils correspondent à des moyennes (spatiales, temporelles ou de configurations) de quantités discrètes (masses, positions et vitesses des grains).
- Le passage « micro-macro » est donc nécessaire aussi bien pour exploiter une expérience, que pour les modèles et simulations numériques.



# Approche ab initio



Approche  
phénoménologique

Prise en compte des conditions aux limites

# Des milieux très discrets



# Méthode des éléments discrets (DEM)

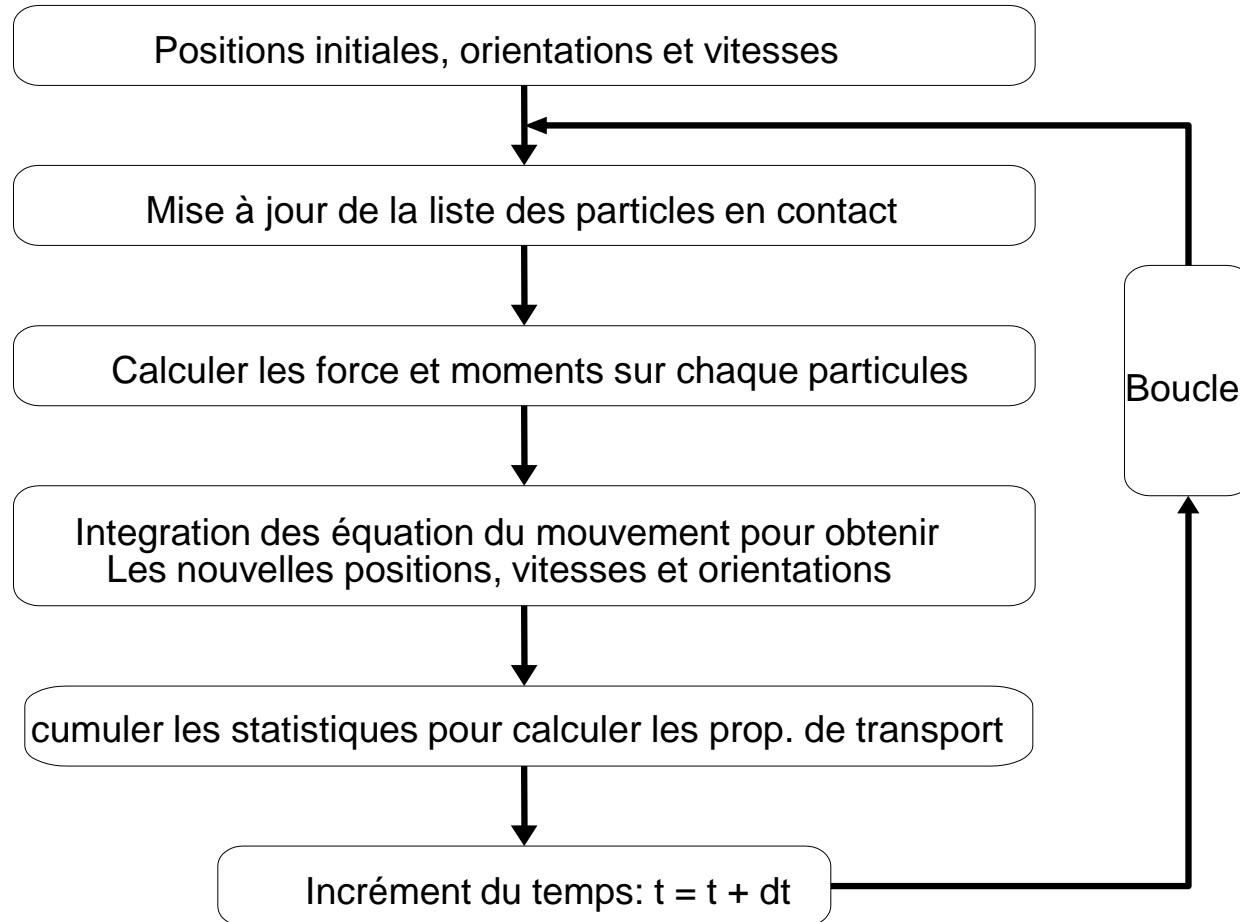
- Plutôt que de résoudre (en les discrétisant!) des EDP continues dont la fermeture est problématique, on peut préférer rester à l'échelle discrète, calculer à tout instant les positions et vitesses des grains pour en déduire les moyennes donnant les champs de vitesse etc.
- On réalise ainsi une sorte d'expérience numérique qui permet aussi de tester l'effet des ingrédients physiques (description des grains et des interactions entre eux, types de conditions aux limites,...)

# Historique

- La dynamique moléculaire (à laquelle on peut rattacher la DEM) a été développée pour simuler des systèmes fluides en suivant les atomes ou molécules (physique statistique)
  - B. J. Alder and T. E. Wainwright, “Statistical mechanical theory of transport properties,” Proceedings of the International Union of Pure and Applied Physics, Brussels, 1956.
  - W. T. Ashurst and W. G. Hoover, “Argon shear viscosity via a Lennard-Jones potential with equilibrium and nonequilibrium molecular dynamics,” Phys. Rev. Lett. 31, 206 (1973).
- La méthode des éléments discrets a été développée de manière indépendante par P. Cundall pendant les années 70
  - P. A. Cundall, Symposium of the International Society of Rock Mechanics,” Nancy, France (1971).
  - P. A. Cundall, “Computer model for rock-mass behavior using interactive graphics for input and output of geometrical data,” U.S. Army Corps. Of Engineers, Technical Report No. MRD, 1974, p. 2074.

# Principe de la DEM

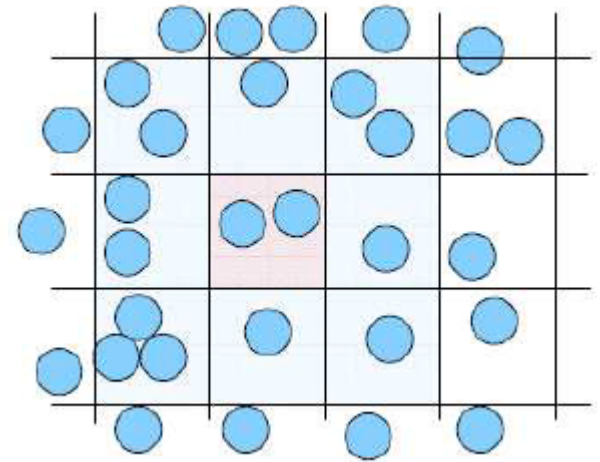
- 1) Modéliser les interactions entre particules en utilisant une approximation suffisamment simple pour permettre un calcul efficace , mais quand même réaliste.
- 2) Intégrer les équations du mouvement  $\Rightarrow$  Donne les positions and vitesses des particules
- 3) Calculer les quantités physiques qui nous intéressent





# Implémentation

- L'étape de paramétrisation est simple pour des sphères : position du centre ( $\mathbf{x}_i$ ), rayon ( $R_i$ ), orientation ( $\mathbf{o}_i$ ), vitesse du centre ( $\mathbf{v}_i$ ), vecteur rotation instantanée ( $\boldsymbol{\omega}_i$ )
- Pour trouver quelles particules sont en contact la méthode la plus simple = examiner toutes les paires de particules et calculer la distance entre elles. Très couteux en temps (en  $N^2$ ).
- Méthode plus économique :
  - Diviser l'espace en cellules virtuelles
  - Faire la liste des grains dans chaque cellule
  - Vérifier les interactions des grains à l'intérieur d'une cellule donnée et celles avec les grains des cellules voisines (26 en 3D).
  - A chaque pas de temps on actualise la liste.
  - Algorithme en  $N$ .

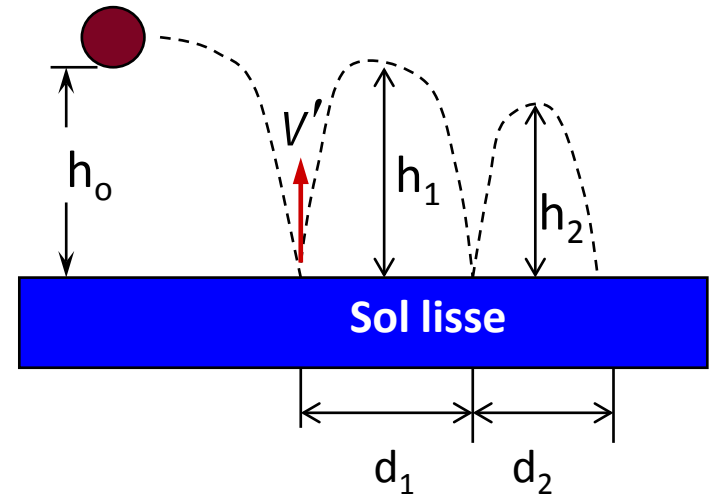


# Interactions entre grains

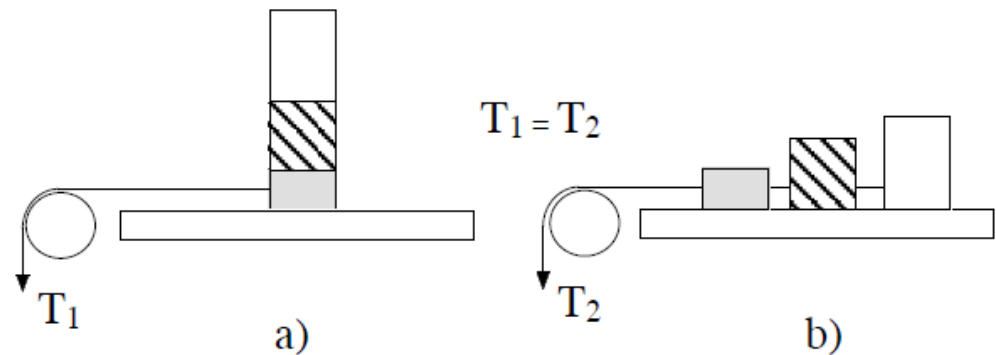
- La définition des forces de contact est la partie la plus délicate et la plus longue.
- Contrairement aux systèmes moléculaires où l'énergie est conservée, la dissipation est une composante essentielle des milieux granulaires. Il est donc indispensable d'utiliser des modèles qui fournissent une approximation réaliste des pertes d'énergie
- **On trouve essentiellement deux types d'approches :**
  - Les modèles de particules « dures » (indéformables) : modèles Event-Driven et dynamique des contacts
  - Les modèles de particules « molles » : L'interaction est une fonction du recouvrement entre particules en contact, qui est sensé représenter la déformation.

# Interactions dissipatives

- Plusieurs mécanismes sont à l'origine de la dissipation.
- On peut observer de manière élémentaire la dissipation lors d'une collision : une balle qui rebondit sur le sol ne remonte pas à sa hauteur initiale.
- Un autre type de dissipation est lié au frottement avec glissement d'un contact persistant.

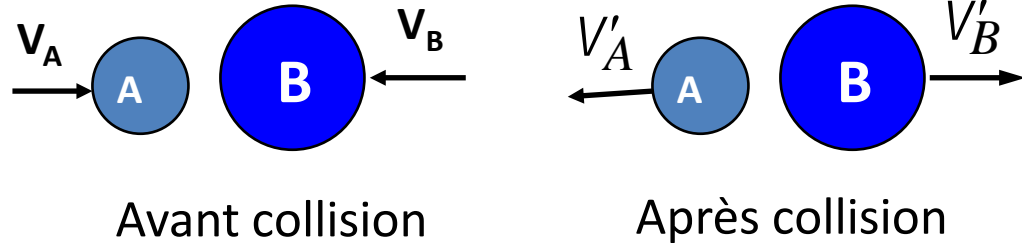


$$T_s = \mu_s N$$

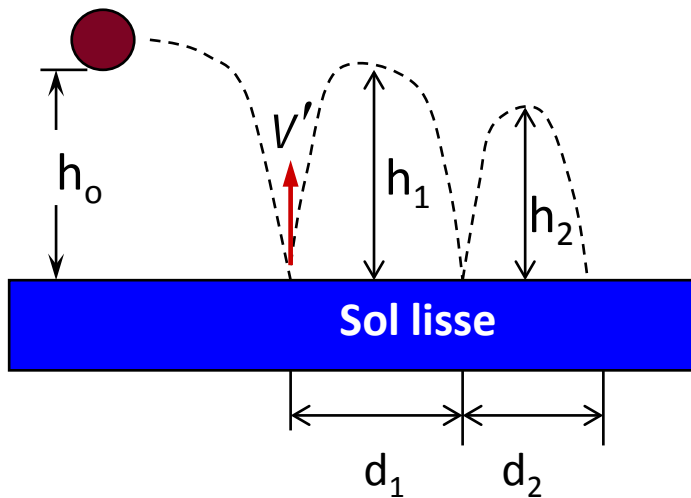


# Coefficient de restitution

$$e = \frac{V'_B - V'_A}{V_A - V_B}$$



Exemple :



$$\left. \begin{aligned} mgh_0 &= \frac{1}{2} mV^2 \\ mgh_1 &= \frac{1}{2} mV'^2 \\ e &= -\frac{V'}{V} \end{aligned} \right\} \Rightarrow e^2 = \frac{h_1}{h_0}$$

$$h_k = e^{2k} h_0$$

# Modèle de collision de sphères dures à 3 paramètres (Walton)

- Le modèle est inspiré de la solution développée par R. Mindlin pour la collision de deux sphères élastiques :

R. D. Mindlin (1949), *J. Appl. Mech* 16, 249; R. D. Mindlin & H. Deresiewicz (1953), *J. Appl. Mech.* 21, 237

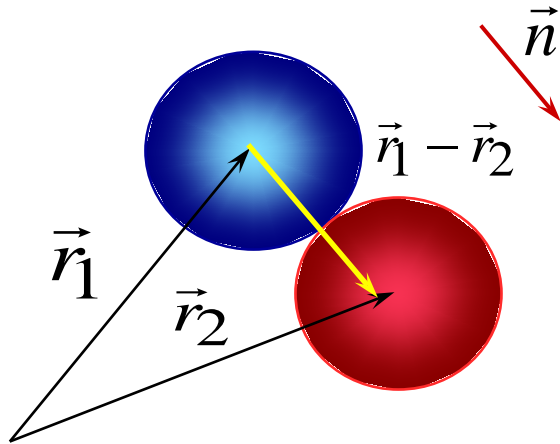
- Dans le modèle de Walton, la collision est instantanée et les vitesses après collision sont déterminées par les vitesses avant collision et par 3 paramètres matériels phénoménologiques :

$e$       Coefficient de restitution normal

$\beta$       Coefficient de restitution tangentiel

$\mu$       Coefficient de frottement

# Collision de 2 sphères (S1 et S2)



$S_i$ : masse  $m_i$ , diamètres  $d_i$ , position centre au moment collision

$$\vec{n} = \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

Vecteur unitaire directeur de la ligne des centres (de la sphère 1 vers la sphère 2).

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2$$

$$\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$$

Vitesses des centres des particules

Vecteurs rotation instantanée

Juste avant la collision

$$\vec{v}_c = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \left( \frac{d_1}{2} \vec{\omega}_1 + \frac{d_2}{2} \vec{\omega}_2 \right) \times \vec{n}$$

Vitesse relative de la sphère 1 par rapport à la sphère 2, au point d'impact (vitesse de glissement)

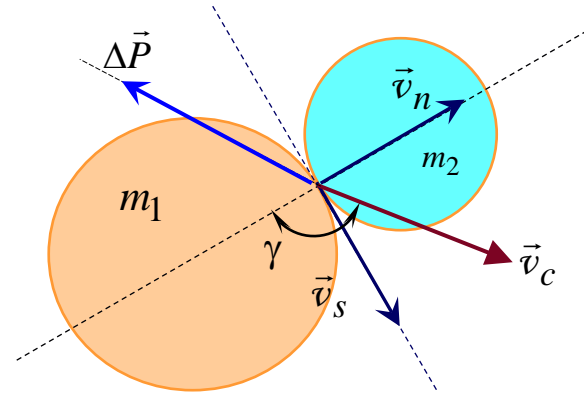
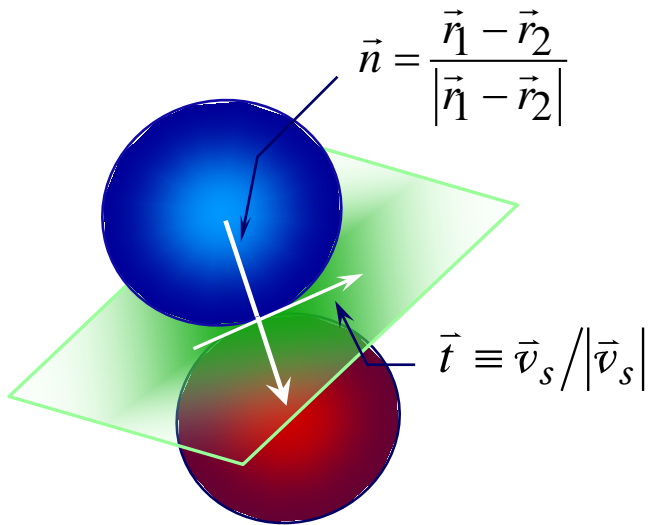
$$\vec{v}_n = (\vec{v}_c \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

Composante normale de la vitesse de glissement

$$\vec{v}_s = \vec{v}_c - \vec{v}_n = \vec{v}_c - (\vec{v}_c \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

Composante tangentielle de la vitesse de glissement





$\vec{t} \equiv \vec{v}_s / |\vec{v}_s|$  Vecteur Tangent

$\gamma$  : angle d'incidence

$\cot \gamma = v_n / v_s$

$\Delta \vec{P}$  percussion exercée par S1 sur S2 (variation de quantité de mouvement au cours du choc).

$$\Delta \vec{P} = m_1 (\vec{v}'_1 - \vec{v}_1) = -m_2 (\vec{v}'_2 - \vec{v}_2)$$

$$-\vec{n} \times \Delta \vec{P} = \frac{2I_1}{d_1} (\vec{\omega}'_1 - \vec{\omega}_1) = \frac{2I_2}{d_2} (\vec{\omega}'_2 - \vec{\omega}_2)$$

$I_i$  : moment d'inertie de Si (par rapport à son centre)

Le calcul des vitesses après impact se réduit donc à celui de la percussion (3 coordonnées).

# Paramètres matériels

La percussion correspond à la force totale exercée pendant le choc. On la caractérise à partir de 3 paramètres :

- le **coefficient de restitution normal** :  $e$

$$(\bar{v}'_1 - \bar{v}'_2) \cdot \bar{n} = -e (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \cdot \bar{n} \Leftrightarrow \bar{v}'_n = -e \bar{v}_n \quad (1)$$

(fraction d'énergie stockée dans la déformation élastique rendue à la composante normale de la vitesse).

- le **coefficient de restitution tangential** :  $\beta$

$$\bar{v}'_s \equiv -\beta \bar{v}_s \quad (2)$$

$\beta$  dépend de l'angle d'incidence  $\gamma$ ,  $\beta \in [-1, 1]$  (N. Maw, J. Barber, and J. N. Fawcett, *Wear* **38**, 101 (1976)).

- le **coefficient de frottement (contact glissant)** :  $\mu$

$$\Delta \bar{P}_t = -\mu \left| \Delta \bar{P}_n \right| \bar{t} \quad (3)$$

Traduit une dissipation par glissement+frottement.

# Remarques

- En utilisant la conservation de la quantité de mouvement, on montre que la composante normale de la percussion est donnée par  $\Delta \bar{P}_n = -(1 + e)m_r \bar{v}_n$  où  $m_r$  est la masse réduite  $m_r = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$
- **Hypothèse de Walton** : on a soit roulement, soit glissement pendant tout le contact

On peut montrer que pour des collisions avec un angle d'incidence proche de  $\pi$  (collisions presque frontales), la valeur de  $\beta$  calculée à partir des définitions précédentes est  $> 1$ , ce qui n'est pas physique (accroissement d'énergie).

En pratique, il existe une valeur limite  $\beta_0$ , de  $\beta$ , au-delà de laquelle la collision est en contact roulant (non glissant).

Cette valeur limite de  $\beta$  correspond à une valeur critique  $\gamma_0$  de l'angle d'incidence au-delà de laquelle l'égalité (3) n'est plus valable et  $\beta = \beta_0$

# Récapitulatif

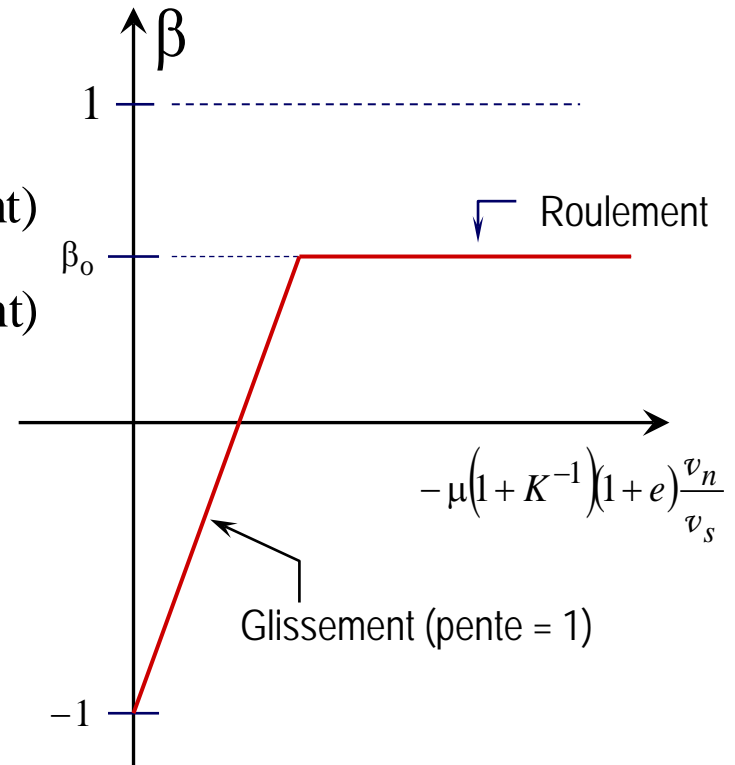
Les 3 paramètres qui caractérisent la dissipation et doivent être déterminés expérimentalement sont :  $(e, \beta_0, \mu)$ .

En combinant les équations on obtient l'expression du coefficient de restitution tangentielle :

$$\beta = \begin{cases} -1 - \mu(1 + K^{-1})(1 + e) \frac{v_n}{v_s}, & \text{si } \gamma \leq \gamma_0 \text{ (glissement)} \\ \beta_0, & \text{si } \gamma \geq \gamma_0 \text{ (roulement)} \end{cases}$$

$$K = \frac{4I}{md^2} = \frac{2}{5} \text{ pour des sphères (homogènes)}$$

de diamètre  $d$



Des expériences pour déterminer les paramètres de collision ont été réalisées (S.F. Foerster, et al.(1994), "Measurements of the collision properties of small spheres," *Phys. Fluids* 6 (3), 1108-1115.)

TABLE I. Sphere properties.

Material		Soda lime glass	Cellulose acetate
Finish		polished, grade "200"	ashed
Diameter (mm)		$3.18 \pm 0.03$	$5.99 \pm 0.03$
Density ( $\text{g/cm}^3$ )		2.5	1.319
Poisson's ratio		0.22	0.28 <sup>a</sup>
Young's modulus ( $\text{N/m}^2$ )		$7.1 \times 10^{10}$	$3.2 \times 10^9$ <sup>a</sup>
Binary collisions	$e$	$0.97 \pm 0.01$	$0.87 \pm 0.02$
	$\mu$	$0.092 \pm 0.006$	$0.25 \pm 0.02$
	$\beta_0$	$0.44 \pm 0.07$	$0.43 \pm 0.06$
Relative contact velocities		$0.64 <  \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}  < 1.2$ m/s	$0.29 <  \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}  < 1.2$ m/s
		$0.06 <  \mathbf{g} \cdot \mathbf{t}  < 0.41$ m/s	$0.14 <  \mathbf{g} \cdot \mathbf{t}  < 0.86$ m/s
Wall collisions	$e$	$0.831 \pm 0.009$	$0.891 \pm 0.003$
	$\mu$	$0.125 \pm 0.007$	$0.208 \pm 0.007$
	$\beta_0$	$0.31 \pm 0.06$	$0.39 \pm 0.07$
Relative contact velocities		$1.0 <  \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}  < 1.7$ m/s	$0.67 <  \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}  < 1.7$ m/s
		$0.24 <  \mathbf{g} \cdot \mathbf{t}  < 0.81$ m/s	$0.06 <  \mathbf{g} \cdot \mathbf{t}  < 1.2$ m/s
Manufacturer		Winsted Precision Ball Co.	Engineering Laboratories
Aluminum plate		Density = $2.7 \text{ g/cm}^3$ Young's modulus = $6.9 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ Poisson's ratio = 0.33 Machine finish	

<sup>a</sup>Estimates, see Drake.<sup>6</sup>

Voir site website de Michel Louge, Mechanical & Aerospace Engineering, Cornell University, Ithaca, NY, USA.

# Exemple : expériences avec des sphères de nylon

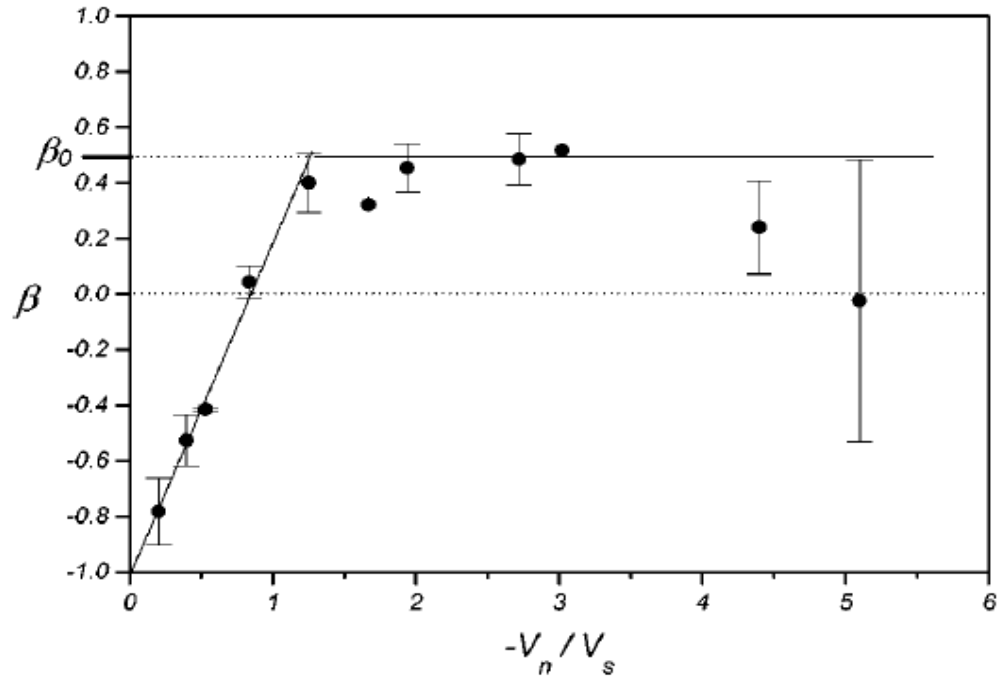
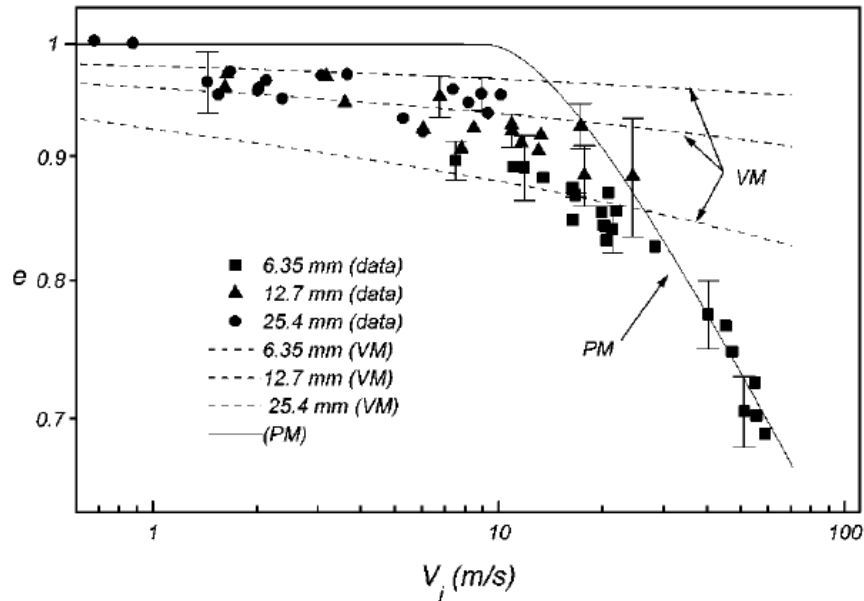


FIG. 6. Coefficient of tangential restitution  $\beta$  vs the cotangent of the angle of incidence.

L. Labous et al., Phys. Rev. E, 56, p. 5717 (1997)

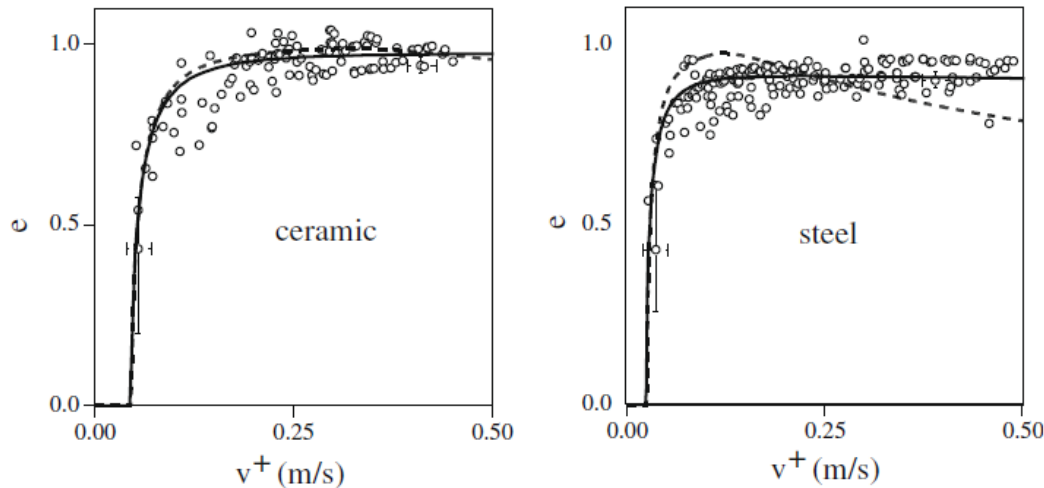


# Effet de la vitesse



- Décroissance du coefficient de restitution normal avec la vitesse d'impact

L. Labous et al., Phys. Rev. E, 56, p. 5717 (1997)

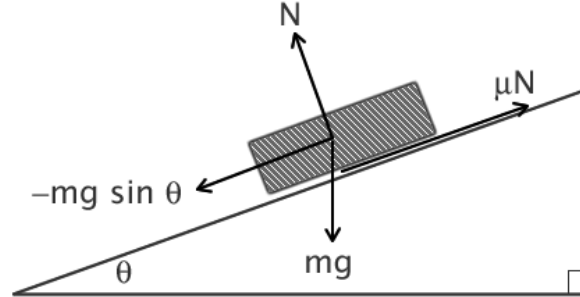


- $d = 3\text{mm}$
- Quand la vitesse relative devient faible,  $e \rightarrow 0$

Sorace et al.

Mec. Res. Com. 36, p.364 (2009)

# Remarque (importante)



- La valeur du coefficient de frottement mesurée lors des collisions est beaucoup plus faible que celle mesurée par l'expérience d'Amontons-Coulomb en statique.
- **Exemple** (A. Lorenz, C. Tuozzolo, and M. Y. Louge," Exp. Mech. 37, 292 (1997). M. Louge, S. Keast, Phys. Of Fluids, 13, p. 1213 (2001)) :
  - Collision bille de verre/plaque d'aluminium :  $\mu = 0.14160.009$
  - Frottement statique :  $\mu_s = 0,593$

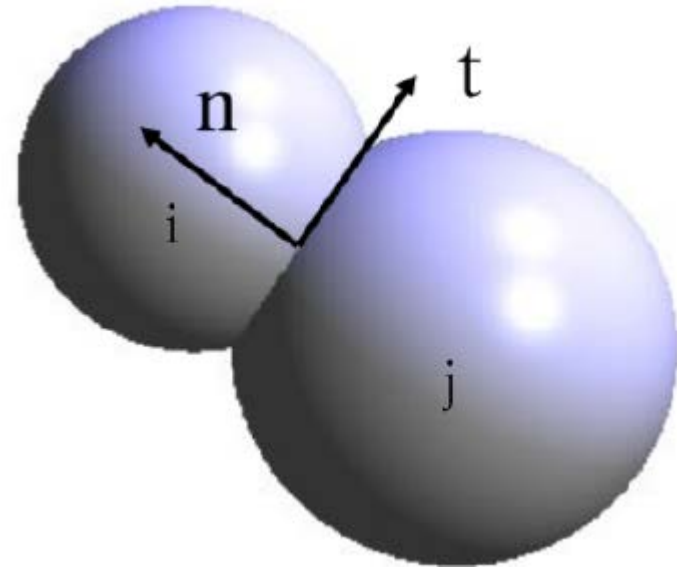
Même genre de résultats avec d'autres matériaux (verre/verre par exemple)

# DEM : la méthode Event-Driven (ED)

- Particules = sphères dures (indéformables)
- Collisions instantanées et binaires (pas de contacts persistants)
- Entre les collisions : trajectoires paraboliques (en présence pesanteur)
  
- Avantage : efficace et rapide
  
- Inconvénient : pas adapté aux écoulements denses (le taux de collision diverge, ne traite pas les contacts persistants)

# DEM : méthode des sphères « molles »

- Simulation de particules « molles » : objets élastiques interagissant avec les particules voisines
  - Avantage : applicable à des systèmes denses avec contacts persistants
  - Inconvénients : nécessite de résoudre à l'échelle de la collision (échelle de temps  $\ll (d/g)^{1/2}$  )  $\Rightarrow$  problème raide, oscillations introduites au niveau du contact, identification des paramètres...

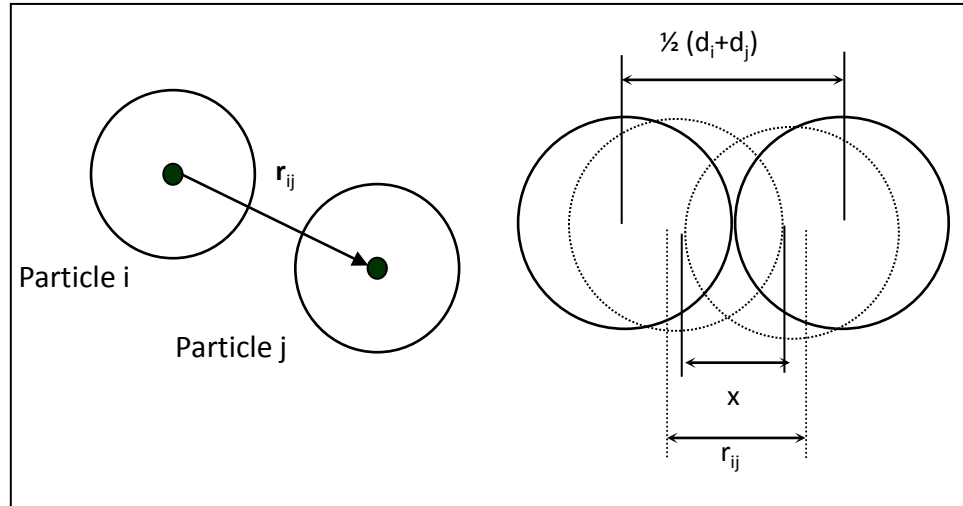


# Force normale

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$$

$$\vec{n}_{ij} = \frac{\vec{r}_{ij}}{\|\vec{r}_{ij}\|}$$

$$x = \left\| \frac{1}{2} (d_i + d_j) \vec{n}_{ij} - \vec{r}_{ij} \right\|$$



Considérons 2 sphères uniformes de diamètre  $d$ .

La force (normale) élastique s'écrit :  $\vec{F}_{n,e} = -k_n x^{1+\alpha} \vec{n}_{ij}$

Cas linéaire :  $\alpha = 0$

Contact de Herz :  $\alpha = 1/2$

$$F_H = \underbrace{\frac{E\sqrt{d}}{3(1-\nu^2)}}_{k_n} x^{3/2}, \text{ si } x > 0$$

$E$  : module d'Young  
 $\nu$  : coefficient de Poisson

Remarque : sphères différentes :

$$F_H = \frac{4}{3} \frac{E_1 E_2}{(1-\nu_1^2)E_1 + (1-\nu_2^2)E_2} \sqrt{\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}} x^{3/2}$$

# Force normale (suite)

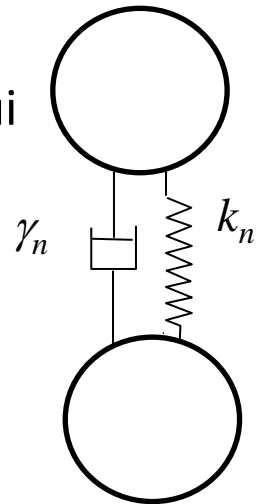
- L'idée la plus simple pour introduire de la dissipation ( $e < 1$ ) consiste à rajouter une force de frottement visqueuse :

$$\vec{F}_{n,d} = -\gamma_n v_n \vec{n}_{ij}$$

En notant  $v_n$  la composante normale de la vitesse de glissement qui correspond aussi à :  $(\vec{v}_j - \vec{v}_i) \cdot \vec{n}_{ij} = \dot{x}$

- Associée à une force élastique linéaire cette force conduit à une équation du second ordre linéaire à coef. constants

$$m_r \ddot{x} + \gamma_n \dot{x} + k_n x = 0 \quad (m_r : \text{masse réduite})$$



dont la résolution permet d'obtenir le temps de collision et le coefficient de restitution

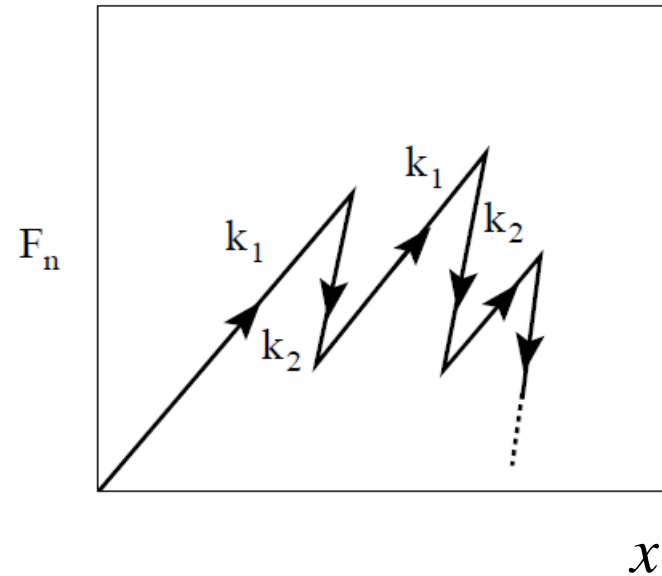
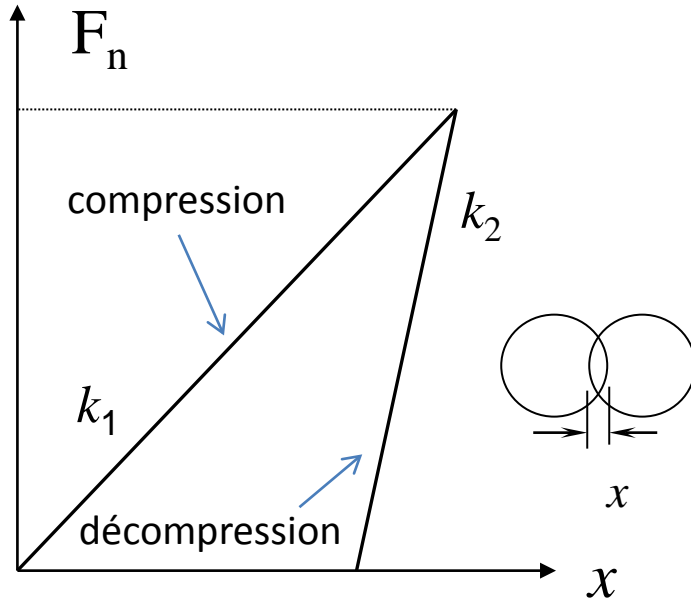
$$t_c = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{k_n}{m_r} - \frac{\gamma_n^2}{4m_r^2}}} \quad e = \exp\left(-\frac{\gamma_n}{2m_r} t_c\right)$$



- L'avantage du modèle linéaire (LSD : Linear Spring-Dashpot) est de fournir un temps de collision qui ne dépend que des constantes  $k_n$ ,  $\gamma_n$  et  $m_r$  et pas des vitesses des particules avant le choc.
- Pour traiter les collision correctement il faut choisir un pas de temps  $\Delta t \ll t_c$  (problème raide). Le modèle linéaire permet de choisir  $\Delta t$  une fois pour toutes en étant sûr de satisfaire toujours cette condition.
- Dans le cas du contact de Herz associé à un amortisseur linéaire,  $t_c$  dépend des vitesses, de plus  $e$  varie aussi avec la vitesse, mais de façon pas réaliste. Il faut introduire une force visqueuse à viscosité non constante :  $\vec{F}_{n,d} = -(\gamma_n x^\gamma) v_n \vec{n}_{ij}$  (avec  $\gamma = 1/2$  pour le modèle Kuwabara and Kono, ou  $\gamma = 1/4$  pour l'amortissement critique) en vue d'obtenir un comportement plus « physique ».

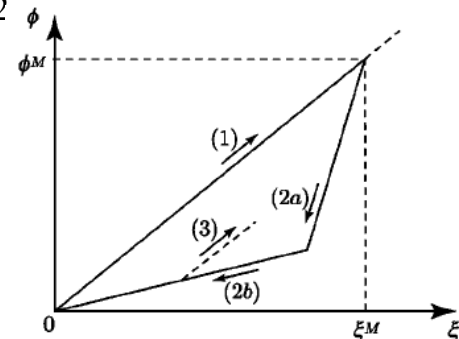
# Modèle de Walton et Braun

Modèle de force linéaire dans lequel la raideur du ressort dépend de l'état de compression du contact



Le modèle fournit un coefficient de restitution constant :  $e = \sqrt{k_1/k_2}$

Variante sans déformation permanente : Pournin (2002)



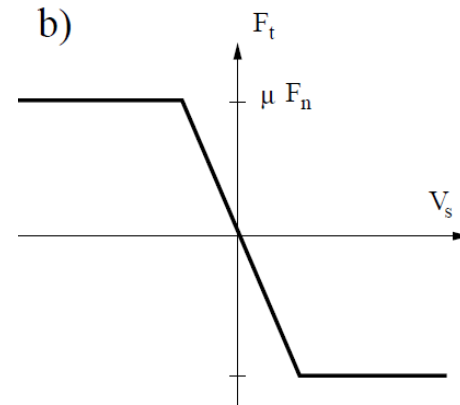
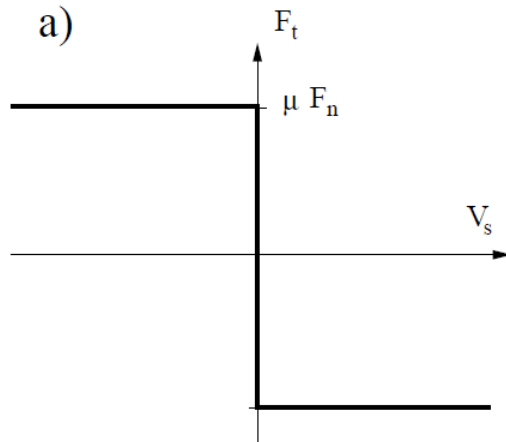
# Lien avec les propriétés matérielles

- La simulation « sphères molles » de la collision normale fait intervenir 2 paramètres :  $(k_n, \gamma_n)$  ou  $(k_1, k_2)$ , alors que le seul paramètre collisionnel (sphères dures) est  $e$ .
- Pour déterminer les paramètres du modèle il faut prendre en compte une caractéristique supplémentaire (par exemple le module d'Young pour Hertz, ou le temps de collision pour le modèle LSD).
- Les modèles donnant les comportements les plus réalistes sont celui de Kuwabara and Kono et celui de Walton et Braun.
- L'utilisateur tend à utiliser des valeurs de  $k_n$  plus faibles que de raison pour diminuer le temps de contact  $t_c$  et donc de calcul ( $\Delta t \ll t_c$ ).
- Ceci peut créer des problèmes dans le cas d'écoulements denses (quand le « temps de vol » entre deux contacts devient comparable à  $t_c$ ) (voir Luding et al. Phys. Rev. E, 50, p. 4113 (1994)).

---

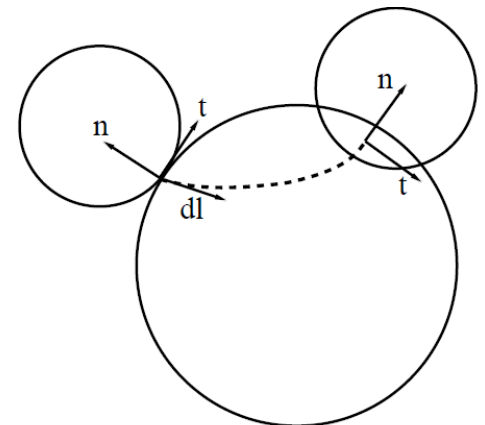
On pourra trouver une comparaison détaillée des résultats donnés par les modèles de sphères molles et des mesures des paramètres collisionnels pour un impact normal dans : Stevens, Henrya, Powder Technology, 154, p.99-109 (2005)

# Composante tangentielle de la force



- Pour éviter le problème de l'indétermination de  $F_t$  quand  $V_s = 0$  (a) on peut régulariser la loi de Coulomb (b)
- Ne convient pas pour simuler des empilements statiques ou quasi-statiques (force tangentielle nulle)
- Modèle de Cundall : ressort tangential

$$F_{ij}^t = -\min(\mu |F_{ij}^n|, k_t |\xi|), \quad \xi = \int_{traj} \vec{t} \cdot d\vec{l}$$



- On voit que la force dépend de l'histoire du contact

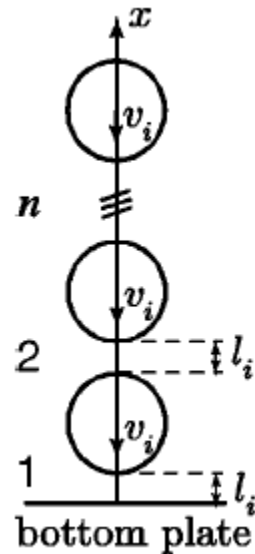
# Lien avec les propriétés matérielles

- On trouve une discussion assez complète du cas de l'impact oblique avec contact frottant (comparaison modèles- expériences) dans : Schäfer et al. J. Phys. I France, 6, 5 (1996).
- Dans le cas force normale LSD et force tangentielle avec ressort (Cundall), nous obtenons un modèle à 4 paramètres :  $(k_n, \gamma_n, k_t, \mu)$ .
- Le coefficient de frottement étant supposé connu (cf. remarque) C'est le rapport  $k_n/k_t$  (et non les valeurs individuelles de ces deux coefficients) qui caractérise le choc.
- On choisit souvent la valeur du rapport assurant que les deux ressorts (normal et tangentiel) vont revenir à la position d'équilibre en même temps (périodes identiques).
- Ceci conduit, pour des sphères identiques, à :  $k_t/k_n = 2/7$
- Ce choix (associé à des valeurs de  $(k_n, \gamma_n)$  choisies pour rendre compte du choc normal) donne un comportement correct du choc binaire

# Contacts multiples

- Le fait de rendre compte de la collision binaire ne garanti pas que les interactions de contact dans un écoulement dense soient correctement modélisées.
- La dynamique moléculaire suppose que les contacts sont indépendants les uns des autres. Dans un écoulement dense il est courant qu'une particule soit en contact simultanément avec plusieurs autres, si bien que ces contacts exercent une influence mutuelle.
- S. Luding (Phys. Rev E. 50, p. 4113 (1994)) montre en considérant la chute d'une colonne de billes que les modèles de particules molles conduisent à une forte sous estimation de la dissipation en cas de contacts multiples (alors que les méthodes ED conduisent à une surestimation allant jusqu'au collapse inélastique).

Voir aussi Pournin et al. Phys. Rev. E, 65 (2001)

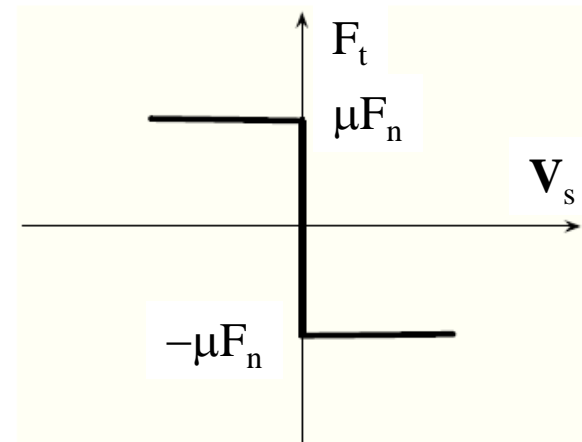
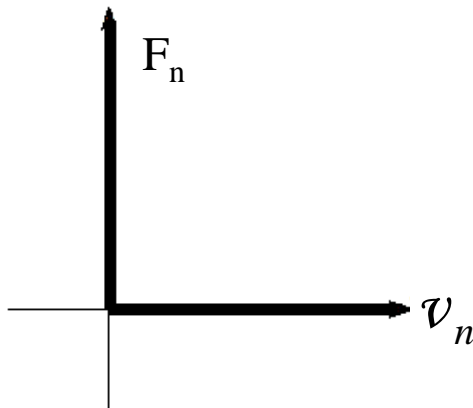


# Dynamique des contacts

- La dynamique des contacts a été développée pour décrire l'évolution de systèmes de particules rigides en contact frictionnel (unilatéral).
- Dans cette description, les forces aux contacts sont, à chaque instant, des inconnues à déterminer.
- Chaque contact introduit une force (3 inconnues) mais aussi une équation de liaison ( $\mathbf{F}_n \cdot \mathbf{v}_n = 0$ ), et la loi de Coulomb :

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{0} \text{ si } \mathbf{F}_t < -\mu |\mathbf{F}_n| \mathbf{t} \text{ ou } \mathbf{F}_t = -\mu |\mathbf{F}_n| \mathbf{t}$$

On a donc autant d'équations (contraintes) que d'inconnues.

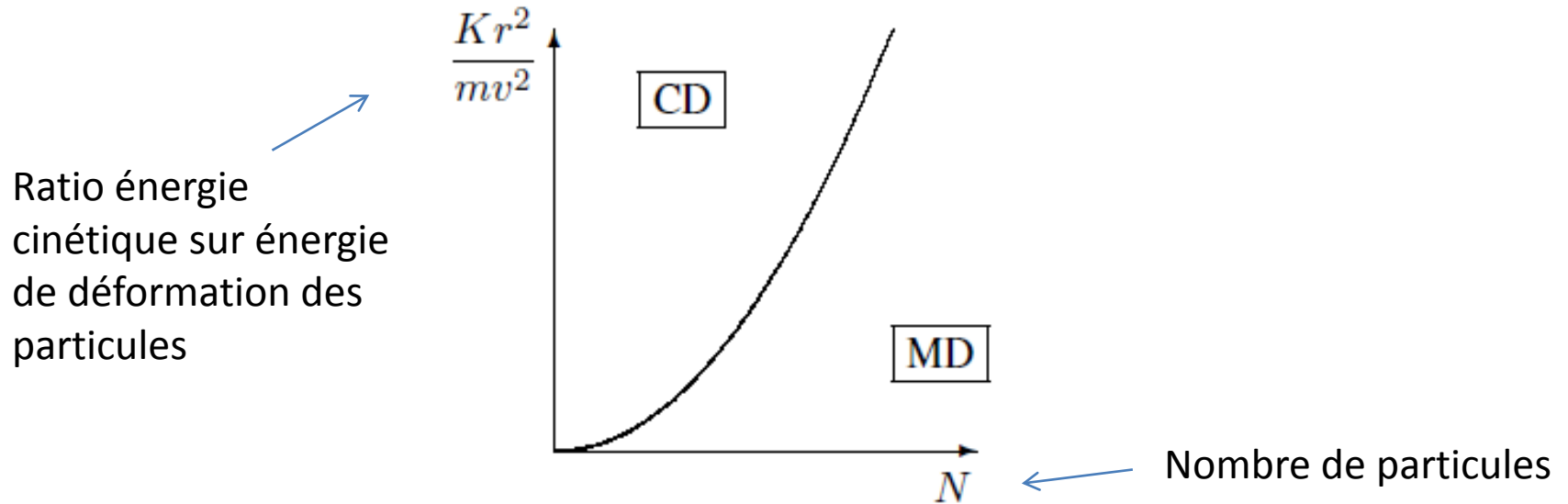


# Résolution numérique

- Les forces de contact sont obtenues, à un instant donné, comme solution d'un système (résolution itérative type Gauss-Seidel ou Jacobi).
- Les équations du mouvement sont résolues en temps pour actualiser les positions des particules.
- L'approche est associée aux équations différentielles algébriques (DAE).
- Les premiers algorithmes de dynamique des contact ont été développés dans les années 1980 (P. Lötstedt, J. Appl. Math, 42 (1982)) et appliqués aux milieux granulaires par Jean Moreau (Eur. J. Mech. A-Solids, 13 (1994)).
- On pourra trouver une idée de la méthode de résolution dans le livre « Les milieux granulaires, entre solides et fluides », B. Andreotti et al. EDP Sciences, p. 44-47 et dans « The physics of granular media », chap.14, Ed. H. Hinrichsen, D. Wolf, Wiley.



# Comparaison avec la dynamique moléculaire



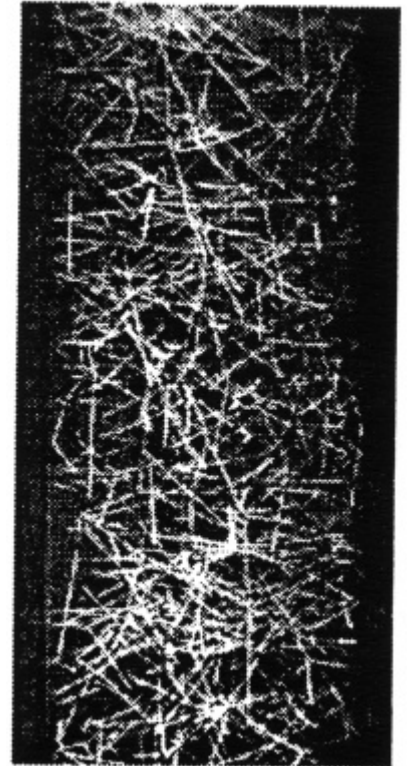
- Les domaines où les simulations par dynamique des contact (CD) et dynamique moléculaires (MD) sont les plus performantes sont séparés par une loi de puissance  $N^{4/d}$  où  $d$  est la dimension de l'espace.
- On voit que, pour des particules rigides, la dynamique des contact est plus performante.
- Le facteur  $N^{4/d}$  est le coût du calcul itératif des forces. On peut le diminuer en utilisant une relaxation incomplète (qui correspond à des particules molles).

# Du discret au continu



# Écoulements granulaires très agités, théorie cinétique

- « ...une molécule en solution ne se distingue d'une particule en suspension que par ses dimensions »  
Einstein, Investigation on the theory of Brownian movement (1956).
- Le concept de température granulaire comme mesure des fluctuations de vitesse dans un système granulaire collisionnel n'est cependant apparu qu'en 1978 (S. Ogawa).
- Il est à l'origine de la théorie cinétique des gaz granulaires qui s'est développée dans les années 80-90.



*Grains dans une boîte vibrée (Falcon et al. Eur. Phys. J. 1999)*

# Systeme hors équilibre

- Température et théorie cinétique des gaz ont été utilisées à l'origine pour des fluctuations autour de l'équilibre.
- Les grains subissent des collisions inélastiques, pour rester stationnaire un système granulaire doit recevoir de l'énergie.
- Rien n'empêche de définir une température (cinétique) hors équilibre : il suffit de pouvoir définir une vitesse moyenne  $\mathbf{V}$  (de configurations, ou sur un volume, ou un intervalle de temps) des particules, et de décomposer la vitesse  $\mathbf{v}$  des particules en vitesse moyenne et partie fluctuante :  $\delta\mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ .
- On définit alors  $T$  comme la moyenne de  $(\delta\mathbf{v})^2$  (pas de masse ni de constante de Boltzmann!).

# Systeme hors équilibre

- Pour être utilisable, il faut que la température reste presque constante sur des échelles couvrant un grand nombre de libres parcours moyens (équilibre local).
- Comme la dissipation est à l'échelle de la collision entre grains, rien n'assure l'équilibre local et la séparation d'échelles.
- Du fait de la situation hors équilibre :
  - la distribution de vitesses n'est pas maxwellienne
  - On a pas équiartition de l'énergie
  - Les constituants d'un mélange ne sont pas à la même température
  - Les températures de translation et de rotation sont différentes
  - Les contraintes normales ne sont pas identiques (même en l'absence d'écoulement).
  - ...

# La théorie cinétique

- variables macroscopiques :
  - Vitesse (macroscopique) :  $\mathbf{V}$
  - Masse volumique  $\rho$  (ou concentration  $n$ )
  - Température granulaire  $T$
- fonction de distribution à une particule

$f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$  = nombre moyen de grains en position  $\mathbf{r}$  à l'instant  $t$  ayant une vitesse  $\mathbf{v} = n$  x densité de probabilité

$$n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{v}$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int \mathbf{v} f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{v}$$

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int \psi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{v}$$

$$T(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n(\mathbf{r}, t)} \int (\mathbf{v} - \mathbf{V})^2 f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{v}$$

# Equation de Boltzmann

instationnaire      Transport convectif      Loi de Newton

$$\underbrace{\frac{\partial f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)}_{\text{Evolution temporelle de la fonction } f} = C(f)$$

Opérateur de collisions

- Le calcul de l'opérateur de collision est la partie difficile
- En supposant que les collisions sont binaires et instantanées on peut l'exprimer en fonction de fonctions de distribution à deux corps comme somme d'un terme de gain (particules en  $(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$  après collision) et d'un terme de perte (particules qui étaient en  $(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$  avant la collision).
- Les fonctions de distribution à 2 corps sont reliées aux fonctions de distribution à 3 corps etc (hiérarchie BBGKY).

# Opérateur de Boltzmann

- Approximations nécessaires.
- hypothèses : collisions localisées dans le temps et l'espace (l'opérateur n'agit que sur les vitesses), pas de corrélations entre les vitesses.
- L'opérateur de collisions (dit de Boltzmann) s'écrit :

$$C(f) = d^2 \iint_{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{12} > 0} d\mathbf{v}_2 d\mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{12}) \left( \frac{1}{e^2} f(\mathbf{v}'_1) f(\mathbf{v}'_2) - f(\mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_2) \right)$$

$\mathbf{k}$  – vecteur d'impact (unitaire) dirigé du centre de 2 vers celui de 1.

$\mathbf{v}'_{1,2}$  – vitesses précollisionnelles

$\mathbf{v}_{1,2}$  – vitesses postcollisionnelles



# Opérateur d'Enskog

- On peut prendre en compte les corrélations de positions au moment de l'impact (exclusion stérique) par l'intermédiaire de la fonction de corrélation de paires  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . On obtient alors l'opérateur d'Enskog :

$$C(f) = d^2 \iint_{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{12} > 0} d\mathbf{v}_2 d\mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{12}) \left( \frac{1}{e^2} G(\mathbf{r}, \mathbf{r} + \mathbf{k}d, t) f(\mathbf{v}'_1, \mathbf{r}, t) f(\mathbf{v}'_2, \mathbf{r} + \mathbf{k}d, t) \right. \\ \left. - G(\mathbf{r}, \mathbf{r} - \mathbf{k}d, t) f(\mathbf{v}_1, \mathbf{r}, t) f(\mathbf{v}_2, \mathbf{r} - \mathbf{k}d, t) \right)$$

- Ceci ne prend pas en compte les corrélations de vitesse.
- L'opérateur de Boltzmann a été beaucoup étudié par les mathématiciens mais pas celui d'Enskog qui conduit à des calculs abominables.
- Dans l'intégrale, on utilise la fonction de corrélation de paires pour deux particules en contact, elle dépend de la fraction volumique  $\nu$  (part de volume occupée par les particules) :  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r} + \mathbf{k}d, t) = \chi(\nu)$
- Différentes expressions de cette fonction sont proposées dans la littérature.

# Equations « hydrodynamiques »

- En multipliant l'équation de Boltzmann par  $\psi$  et en intégrant par parties on obtient :

$$\frac{\partial n \langle \psi \rangle}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (n \psi \mathbf{v}) - \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot n \langle \nabla_{\mathbf{v}} \psi \rangle = \int \psi C(f) d\mathbf{v} \quad \text{collisionnel}$$

- En prenant  $\psi = m$ , puis  $m v_i$ , puis  $1/2 m v^2$ , on obtient successivement les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \quad \text{est la dérivée particulière}$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \text{ tenseur des contraintes : } \boldsymbol{\sigma} = -\rho \langle \delta \mathbf{v} \otimes \delta \mathbf{v} \rangle + \boldsymbol{\sigma}^{col}$$

$\mathbf{f}$  : densité volumique de force extérieure

# Equation de l'énergie

En combinant l'équation obtenue pour  $\psi = 1/2mv^2$  avec la conservation de la masse et de la quantité de mouvement on obtient l'équation de la chaleur :

$$\frac{1}{2} \frac{DT}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{V} - \nabla \cdot \mathbf{q} - \Gamma$$

Collisionnel (taux de dissipation)

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2} \rho \langle (\delta \mathbf{v})^2 \delta \mathbf{v} \rangle + \mathbf{q}^{col}$$

est le vecteur courant de chaleur

$T$  est la température granulaire

# Relations constitutives

- Les relations constitutives permettent d'exprimer  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{q}$ , et  $\Gamma$  en fonction des variables macroscopiques  $\rho$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $T$ .
- Elles ne peuvent être explicitées que si on sait exprimer  $f$  en fonction de  $\rho$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $T$ . Le problème c'est qu'on ne sait pas résoudre l'équation d'Enskog-Boltzmann...
- La méthode utilisée en théorie cinétique des gaz moléculaires consiste à effectuer un développement en fonction des gradients :

$$f = f_0 + Kf_1 + K^2 f_2 + \dots$$

où  $K$  est le nombre de Knudsen (rapport entre libre parcours moyen et échelle macro).

- $f_0$  correspond à l'état d'équilibre, l'ordre 1 donne les équations de Navier-Stokes, l'ordre supérieur (quadratique) est l'ordre de Burnett.
- Pour un gaz moléculaire  $f_0$  est la distribution de Maxwell

- Pour un gaz granulaire cette approche se heurte à de sérieux problèmes :
  - en l'absence de séparation d'échelles et d'équilibre local il n'est pas sûr que  $f$  puisse s'exprimer en fonction des variables macro (le temps nécessaire pour atteindre l'équilibre local peut être « macroscopique »)
  - Le développement suppose que  $K$  est petit (gradients variant sur des échelles  $\gg$  libre parcours moyen)
  - Il n'y a pas d'équilibre  $\Rightarrow$  que doit on prendre pour  $f_0$  ?
- Les premiers qui se sont attaqués au problème ont supposé que la distribution de Maxwell restait en gros valable, et que  $f_1$  était également proche de celle des gaz moléculaires. On obtient alors les expressions :

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[ -p + \left( \xi - \frac{2\eta}{3} \right) \nabla \cdot \mathbf{V} \right] \mathbf{I} + 2\eta \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$$

$$\mathbf{q} = -K \nabla T - K_v \nabla v$$

$$F_5(v) = \frac{12}{\sqrt{\pi}} v^2 \chi(v)$$

$$\Gamma = \frac{\rho_p}{d} (1 - e^2) F_5(v) T^{\frac{3}{2}}$$

Terme dû à l'inélasticité des collisions. Engendre un courant de chaleur anormal des régions denses vers les régions plus diluées

# Expression des coefficients de transport

$$p = \rho_p F_1(\mathbf{v}) T$$

$$\eta = \rho_p dF_2(\mathbf{v}) \sqrt{T} \quad F_1, F_2, F_3, \dots \text{ sont des fonctions de } e, \mathbf{v} \text{ et } \chi(\mathbf{v})$$

$$\xi = \rho_p dF_3(\mathbf{v}) \sqrt{T}$$

$$K = \rho_p dF_4(\mathbf{v}) \sqrt{T}$$

Les formes des relations sont proches de celles obtenues pour un fluide compressible.

*Conditions aux limites* : Il est difficile d'établir les conditions aux limites en théorie cinétique des gaz (y compris moléculaires). Nécessite de :

- préciser les caractéristiques géométriques et matérielles de la paroi (collisions particules/paroi)
- résoudre l'équation de Boltzmann près de la paroi (présence d'une paroi affecte la fonction de distribution  $f \Rightarrow$  équation intégrodifférentielle)

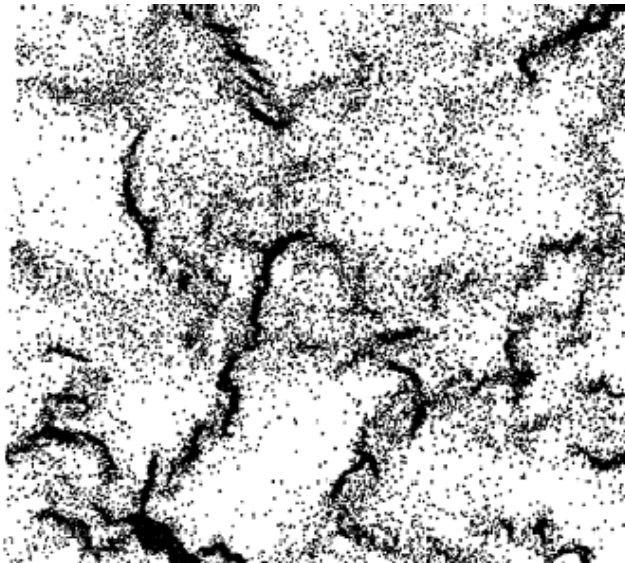
Voir J. Jenkins, J. Appl. Mech. 114 (1992); J. Jenkins et M. Louge, Phys. Fluids (1997)

# Quelques développements plus récents

- L'établissement des relations précédentes est sujet à caution du fait de l'utilisation de distributions gaussiennes. On sait que les systèmes dissipatifs hors équilibre ont des distributions de vitesses non gaussiennes (cf. écoulements turbulents).
- A partir de la fin des années 90 de nouveaux modèles ont été développés pour essayer de résoudre la difficulté à définir un état de base ( $f_0$ ).
- Isaac Goldhirsch a proposé d'utiliser la limite élastique pour laquelle la distribution de Maxwell est valide, le principe est alors de développer en fonction de deux paramètres :  $(1-e^2)$  et  $K$ . Il a montré que les termes de Burnett (termes en  $K^2$ ) ne sont pas négligeables et conduisent à l'anisotropie des contraintes normales.
- D'autres ne développent que suivant  $K$ , mais utilisent comme état de référence  $f_0$  le refroidissement sans injection d'énergie, il est supposé homogène en densité et isotrope en vitesse (HCS).
- Le refroidissement homogène est cependant instable par formation d'amas.

# Instabilité d'amas

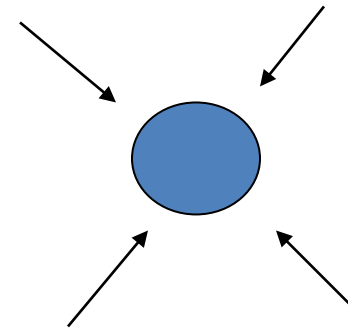
*Simulation de 40,000 disques,  $e=0.7$   
Conditions init. : distribution uniforme  
Temps : 500 collisions/par particule*



*MacNamara & Young, Phys. Fluids, 1992  
Goldhirsch and Zanetti, PRL, 70, 1619 (1993)  
Ben-Naim, Chen, Doolen, and S. Redner  
PRL **83**, 4069 (1999)*

Mecanisme d'instabilité:

*Fluctuation de densité ( $\uparrow$ ) $\rightarrow$   
Augmentation du nombre de collisions $\rightarrow$   
Augmentation de la dissipation $\rightarrow$   
Décroissance de la température $\rightarrow$   
Décroissance de la pression $\rightarrow$   
Augmentation de la densité....*





# A suivre...

- La théorie cinétique précédemment décrite marche bien pour des écoulements à faible densité, dominés par des collisions binaires instantanées sans corrélations de vitesses avec un coefficient de restitution  $e$  proche de 1.
- Elle ne prend pas en compte
  - les collisions très inélastiques
  - le frottement, et la dissipation engendrée en cas de contact frottant-glissant
  - La polydispersité
  - La possibilité de contacts persistants
  - ...
- Des améliorations ont été proposées pour prendre en compte certaines de ces « lacunes » (voir par exemple R. Delannay, Nature Mat. 6 (2007))

# L'approche phénoménologique

I, pourpres, sang craché, rire des lèvres belles  
Dans la colère ou les ivresses pénitentes ;

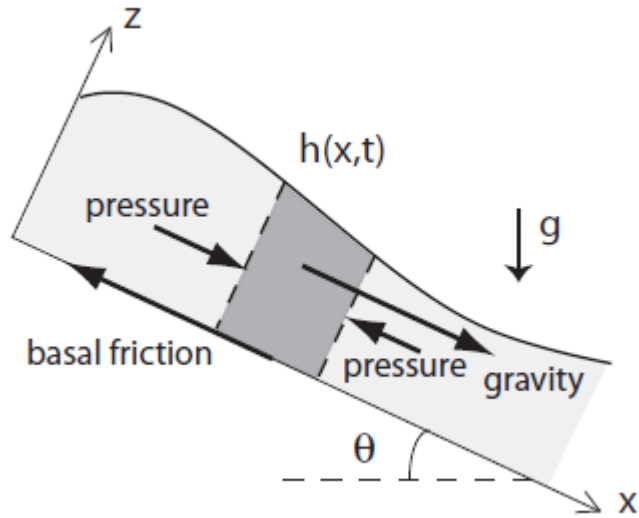
*Voyelles, A. Rimbaud*



# Un milieu continu

- Indépendamment de ce que nous dit la théorie cinétique, on peut s'attendre à ce que les écoulements granulaires obéissent à une description de type « hydrodynamique ».
- Les équations de bilan locale de masse et de quantité de mouvement on une portée générale.
- La question est principalement de trouver une relation constitutive décrivant la façon dont le matériau granulaire s'écoule sous l'effet des contraintes qu'il subit.
- Une relation constitutive doit s'écrire sous forme de relation tensorielle.
- Une alternative plus simple dans le cas d'écoulements minces est de moyenner les équations dans l'épaisseur. La relation constitutive est remplacée par une loi de friction à la base de l'écoulement.

# Equations de Saint-Venant (2D)



Ecoulement incompressible 2D

$$\mathbf{V} = (u(x,z,t), v(x,z,t))$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

Bilan (local) de quantité de mouvement

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \right) = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g \sin \theta + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\rho g \cos \theta + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \sigma_{zz} = \rho g \cos \theta (h - z)$$

Approximation de couche mince : on néglige certains termes devant d'autres (cf équations de Prandtl pour la couche limite) par exemple  $v \ll u$

- On intègre les équations selon  $z$ , ou on écrit directement les bilans de masse et de quantité de mouvement sur l'élément de volume du schéma
- Le calcul a été fait par Savage et Hutter JFM (1989)

$$\text{Masse : } \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \langle u \rangle}{\partial x} = 0 \quad \langle u \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h u dz$$

*Bilan de quantité de mouvement :*

$$\rho \left( \frac{\partial h \langle u \rangle}{\partial t} + \frac{\partial h \langle u^2 \rangle}{\partial x} \right) = \rho g h \sin \theta - K \rho g h \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \tau_b$$

$K$  : coefficient de redirection ( $\sigma_{xx} = K \sigma_{zz}$ ),  $K = 1$  si contraintes normales isotropes

$\tau_b$  : contrainte basale

- On voit qu'on a besoin d'une équation de fermeture ( $\langle u^2 \rangle$  en fonction de  $\langle u \rangle$ ) et d'une expression pour  $\tau_b$ , ce qui correspond à la rhéologie de l'écoulement.

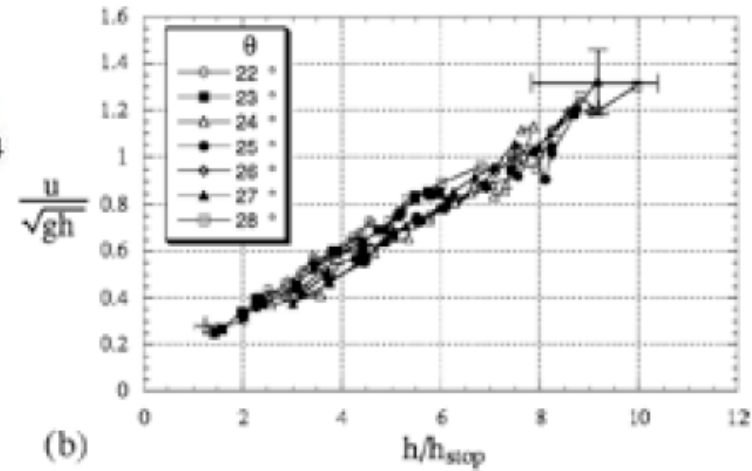
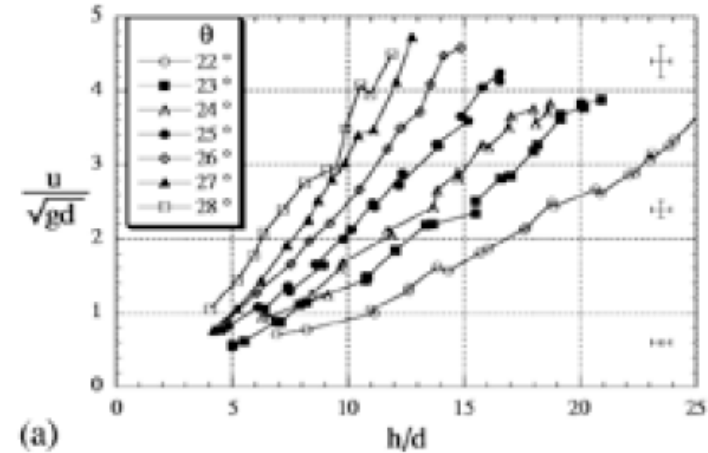
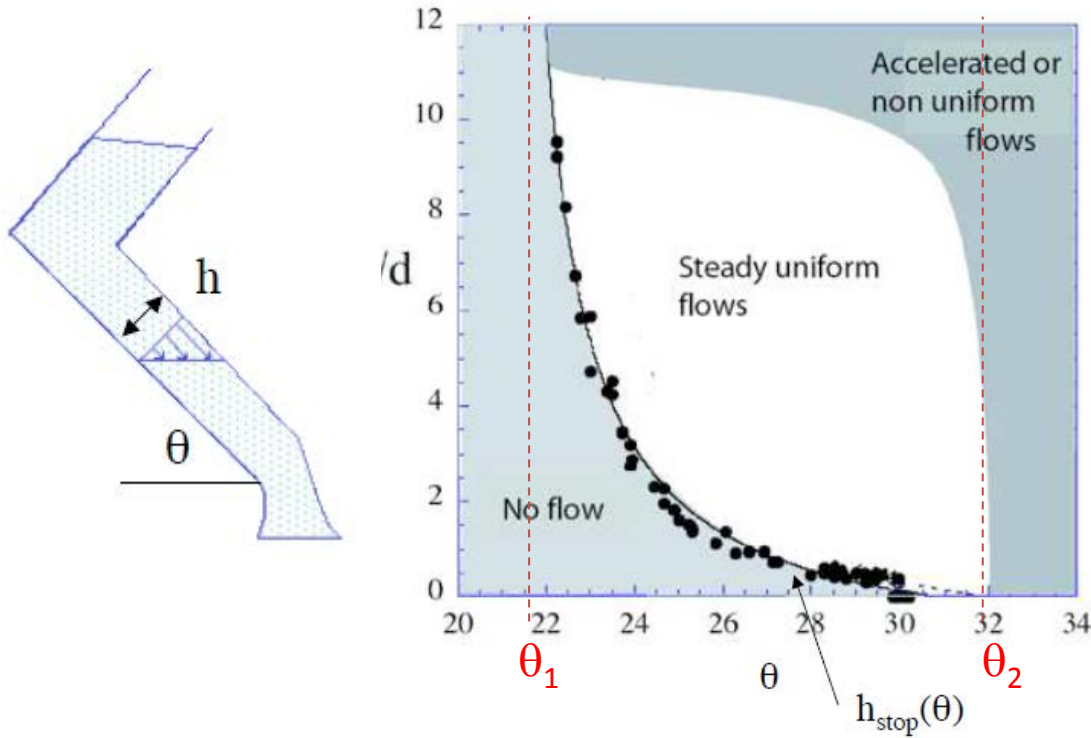
# Limites de l'approche

- On a négligé les phénomènes d'érosion/déposition à la base (écoulement sur fond érodable, dépôt, ...). S'il y a un échange de matière avec la base il faut modifier les équations (cf. Douady et al. Eur. Phys. J. B (1999)).
- De même si l'écoulement est confiné (parois latérales fixes) ou s'il y a des levées (parois érodables).
- En général, l'écoulement n'est pas stationnaire ni établi selon  $x$ , la relation entre  $\langle u^2 \rangle$  et  $\langle u \rangle$  varie en fonction de  $x$  et  $t$ . Il faudra injecter la loi constitutive (éventuellement sous une forme simplifiée par l'hypothèse de couche mince) pour trouver cette relation.
- On ne sait pas ce que vaut la contrainte basale. Le plus simple est de la prendre constante. Cependant dans ce cas, on prévoit un seul angle possible pour un écoulement stationnaire établi sur plan incliné, la 2<sup>ème</sup> équation s'écrit en effet :

$$\rho g h \sin \theta = \tau_b$$

# Expériences d'écoulements sur plan « rugueux »

## O. Pouliquen, Phys. Fluids 99



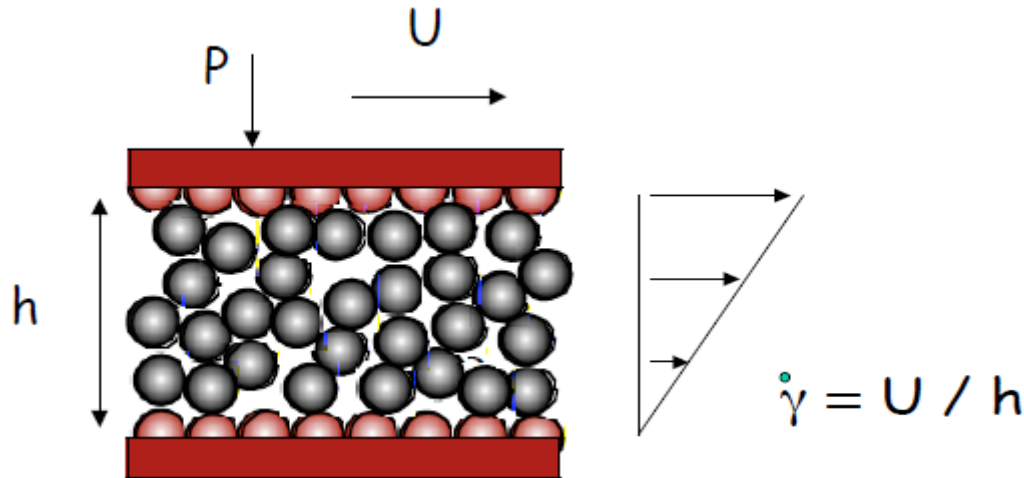
Loi empirique ( $u$  : vitesse moyenne) :

$$\frac{u}{\sqrt{gh}} = \beta \frac{h}{h_{stop}(\theta)}$$

$h_{stop}$  : épaisseur de dépôt.

# Rhéologie : essai de cisaillement simple

Cisaillement plan (sans g) à P et U imposés, simulations 2D, F. Da Cruz, Thèse (2003), Phys.Rev.E. (2005)

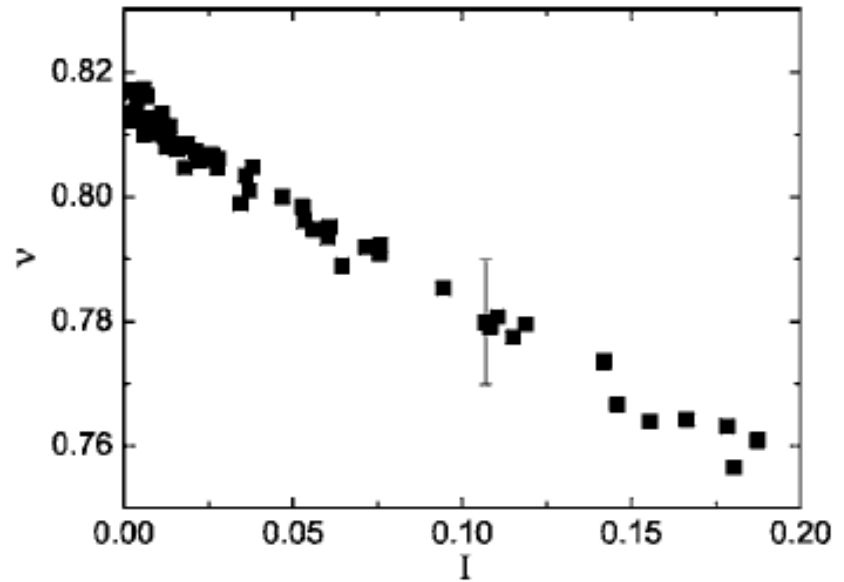


- Groupement adimensionnel :  $I = \frac{\dot{\gamma} d}{\sqrt{P/\rho}}$
- rapport entre deux temps :
  - Le temps de cisaillement :  $1/\dot{\gamma}$
  - Le temps de réarrangement :

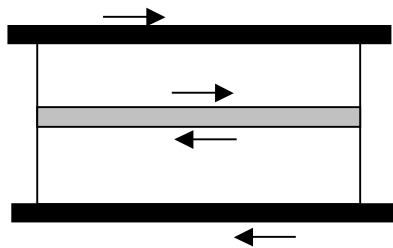
$$m \frac{d}{t^2} = PS \Rightarrow t^2 = d \left( \frac{m}{S} \right) \frac{1}{P} \propto \frac{\rho d^2}{P} \Rightarrow t \propto d \sqrt{\frac{\rho}{P}}$$



- Fraction volumique :

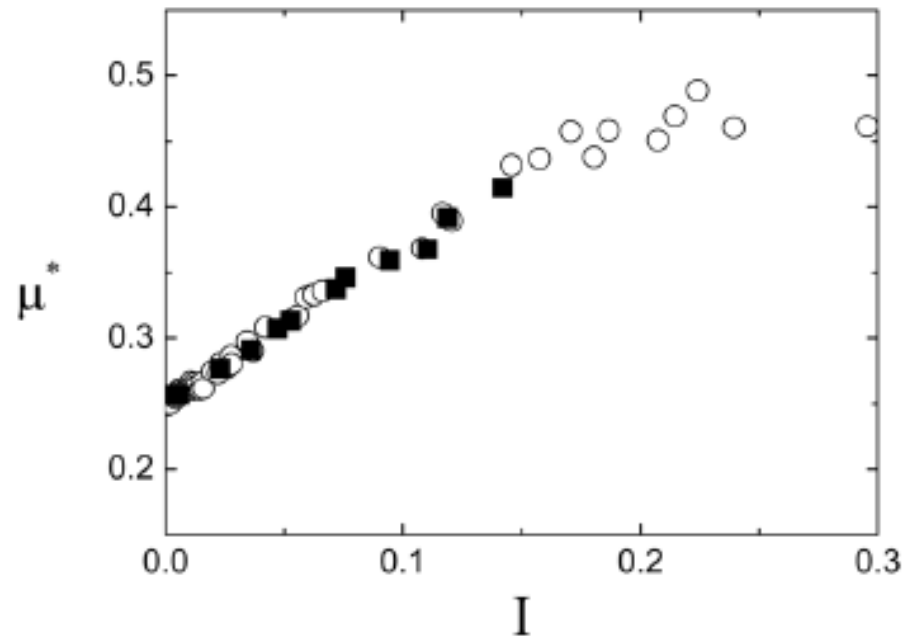


- Frottement effectif

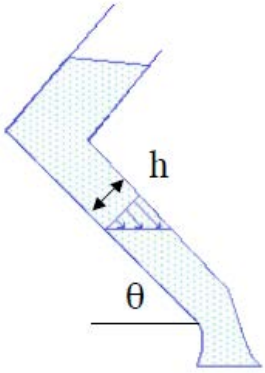


$$\mu^* = \frac{S}{N} = \frac{\tau}{P}$$

(uniforme)



# Coefficient de frottement effectif (écoulement plan)

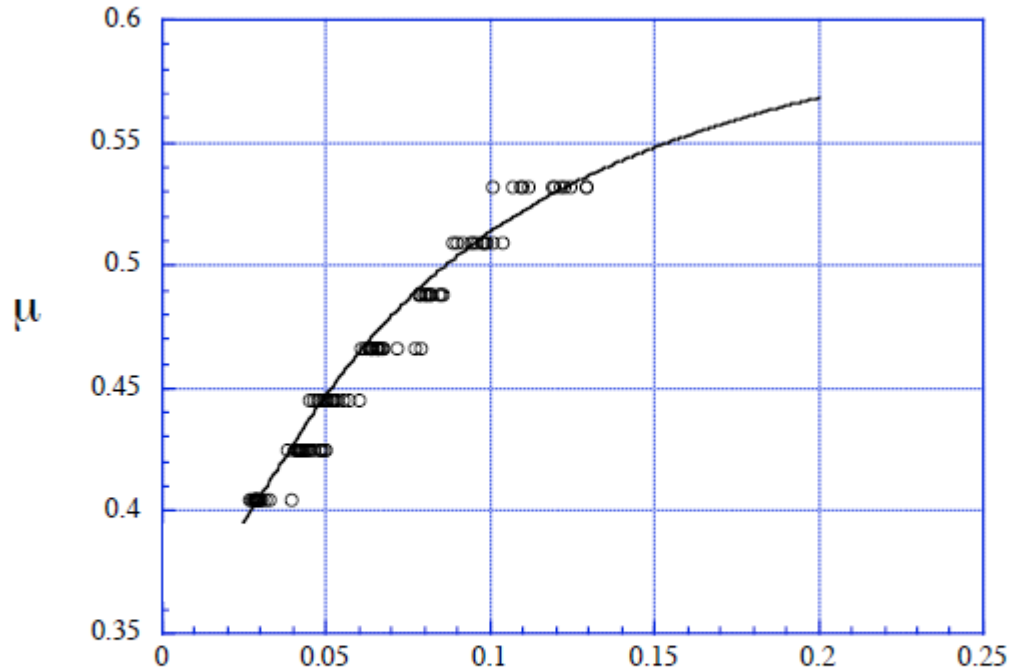


Frottement effectif :

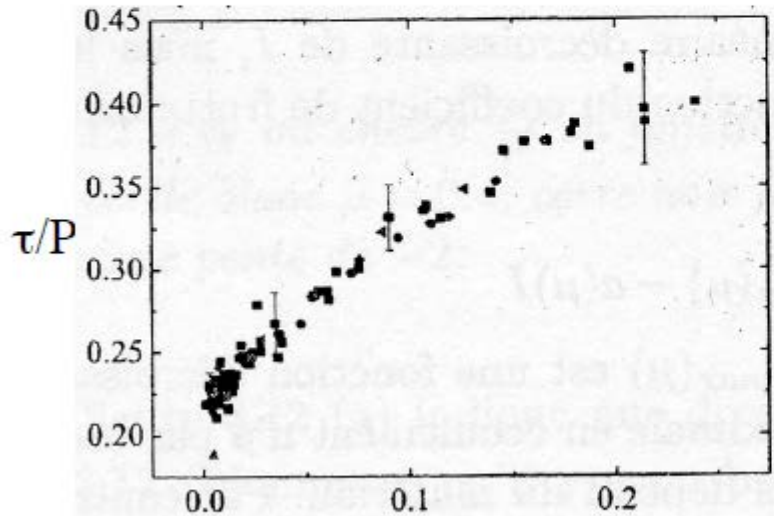
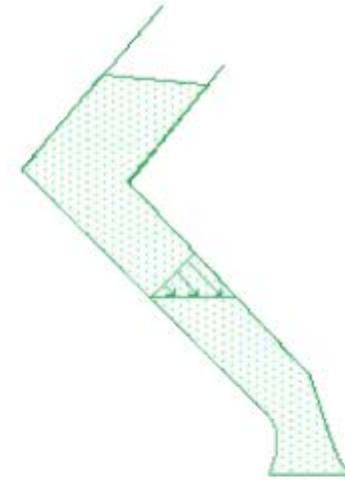
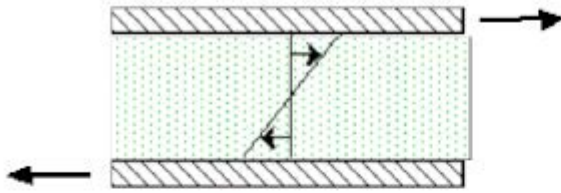
$$\mu = S/N = \tan \theta$$

$$\frac{u}{\sqrt{gh}} = \beta \frac{h}{h_{\text{stop}}(\theta)}$$

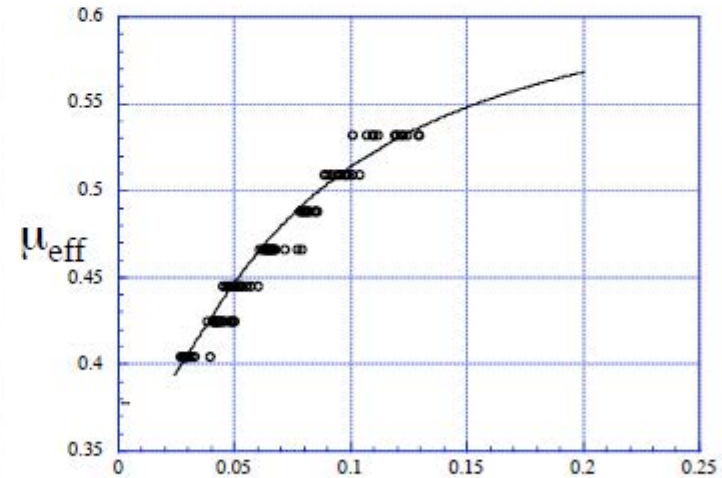
En inversant la relation  
on obtient  $\theta$ , puis  $\tan\theta$   
en fonction de  $I$



$$I = \frac{u d}{h \sqrt{gh}}$$



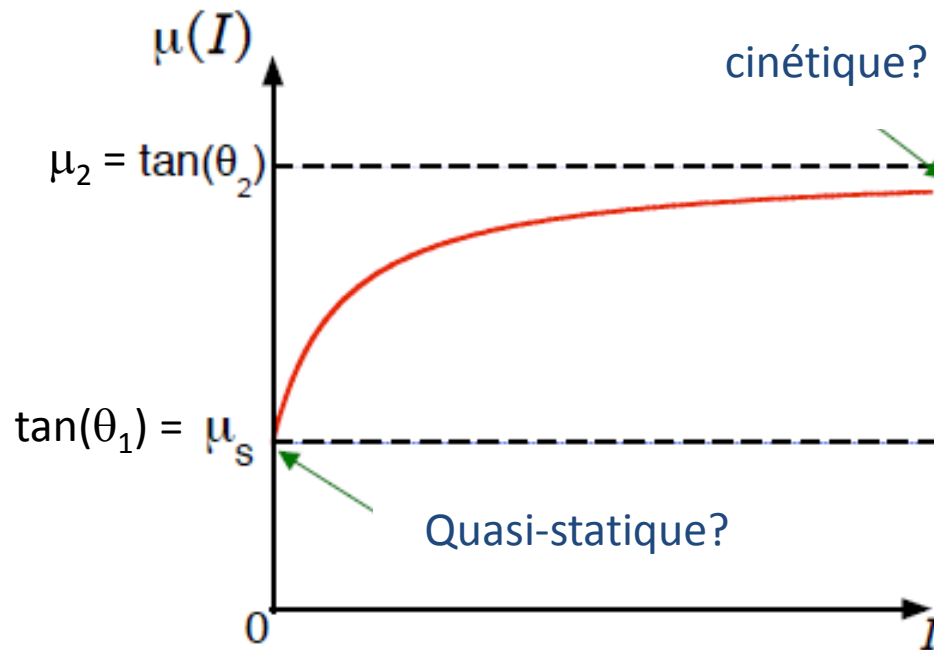
$$I = \gamma \sqrt{\frac{\rho d^2}{P}}$$



$$\frac{u}{h} \sqrt{\frac{d^2}{gh}}$$

- Loi empirique compatible avec les 2 situations

Peut on aller plus loin et considérer  $\mu(I)$  comme une loi de comportement locale?



$$\tau = \mu(I)P$$

$$I = \frac{\dot{\gamma} d}{\sqrt{P/\rho}}$$

$$\mu(I) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{I_0/I + 1}$$

# Et généraliser à 3D... (O. Pouliquen, Nature 2006)

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

Tenseur des contraintes

« Pression isotrope »

déviateur

$$p = -\frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{3} = -\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \eta \dot{\boldsymbol{\gamma}}$$

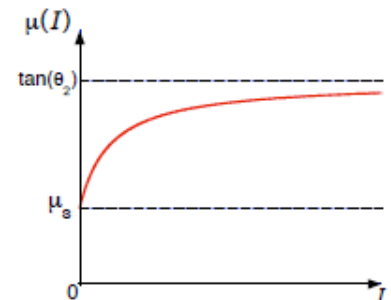
$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{V} + {}^t \nabla \mathbf{V} = 2\mathbf{D}$$

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}$$

Viscosité effective

$$\eta = \frac{\mu(I)p}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}\|}$$

$$I = \frac{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}\| d}{\sqrt{p/\rho}}$$



$\mu(I)$  est la fonction « habituelle »

$$\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}\| = \sqrt{\frac{\dot{\gamma}_{ij}\dot{\gamma}_{ij}}{2}} = \sqrt{\frac{\text{tr}(\dot{\boldsymbol{\gamma}}^* \dot{\boldsymbol{\gamma}})}{2}}$$

# Un fluide viscoplastique

- La viscosité effective diverge quand  $\|\dot{\gamma}\| \rightarrow 0$

- Seuil d'écoulement :

$$\|\boldsymbol{\tau}\| = \eta \|\dot{\gamma}\| = \mu(I) p \geq \mu_s p$$

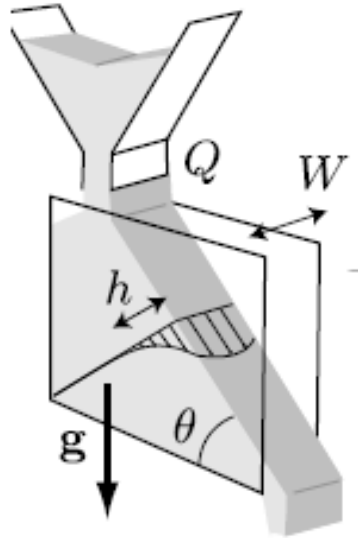
critère de type Drucker-Prager : combinaison linéaire de  $p$  (invariant d'ordre 1 de  $\boldsymbol{\sigma}$ ) et de l'invariant d'ordre 2 du déviateur de  $\boldsymbol{\sigma}$ .

- La rhéologie proposée est de type fluide visco-plastique, avec une viscosité effective qui dépend non seulement du taux de déformation, mais aussi de la pression

# Les limites de la rhéologie locale viscoplastique

- Cette rhéologie a été essentiellement testée sur des écoulements unidirectionnels.
- Pour ces écoulements les limites apparaissent quand  $I \rightarrow 0$  (jamming) et quand  $I$  devient grand (transition vers les écoulements « rapides » collisionnels).
- La généralisation tensorielle commence seulement à être mise à l'épreuve (par des simulations principalement), elle semble rapidement mise en défaut dès que l'écoulement n'est plus unidirectionnel (T. Börzsönyi et al. Phys. Rev. Lett. (2009), A. Holyoake et J. McElwaine J. F. M. (2012)).

# Un exemple éducatif : le SSH



- Paramètres de contrôle :
  - Écartement  $W$
  - Débit  $Q$

Montage « typique » pour étudier un écoulement confiné

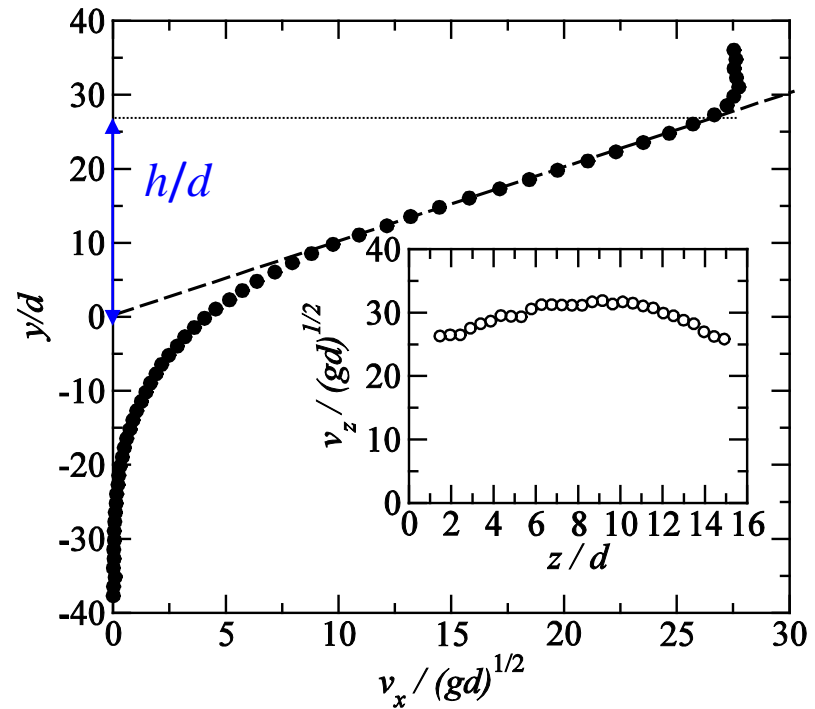
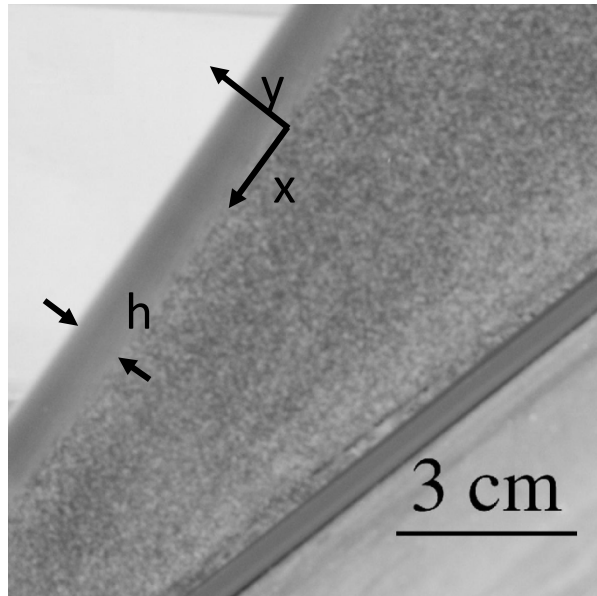
Mesure de  $h$  et  $\theta$  (choisis par l'écoulement)

Pour  $W$  donné,  $h$  et  $\theta \uparrow$  avec  $Q$





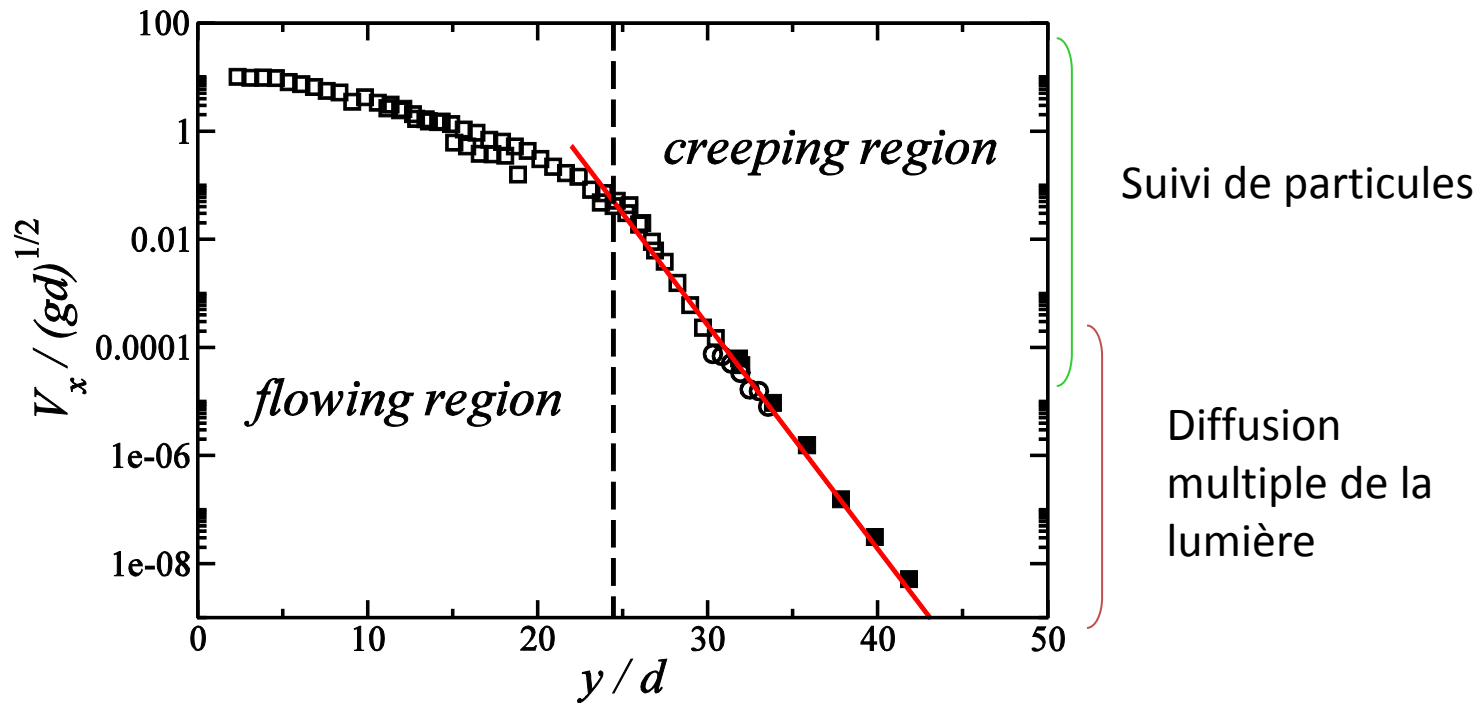
# Profils de vitesse (billes de verre)



N. Taberlet et al. PRL (2003)

- Suivi de particules à la paroi
- Partie linéaire → définition de l'épaisseur d'écoulement :  $h$
- Vols balistiques près de la surface
- Décroissance exponentielle de la vitesse dans la partie « statique » (mouvements intermittents)

# Queue exponentielle du profil de vitesse



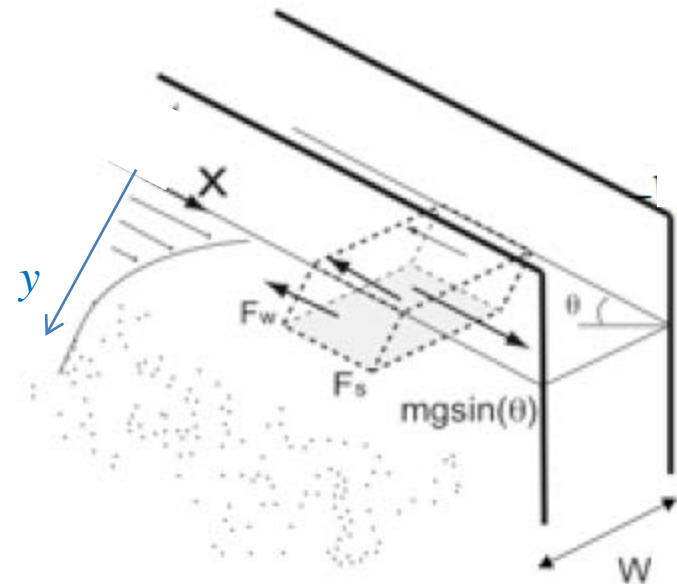
*P. Richard et al. PRL 2008*

- Séparation nette entre la zone « coulante » et la zone de fluage

# Bilan de forces

(N. Taberlet et al. PRL (2003))

**Parois et fond** : Force normale :  
résultante de la pression (supposée  
hydrostatique)

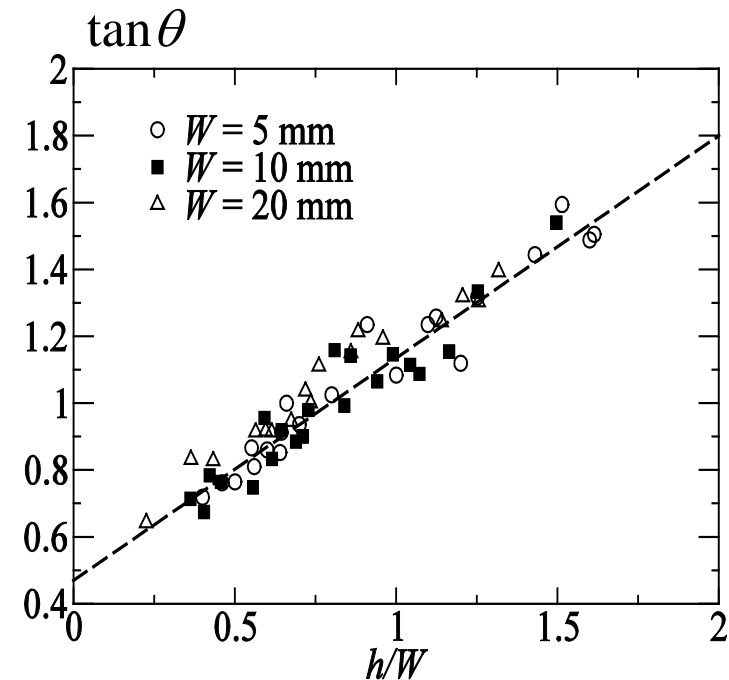


$F_w = \mu_w N$ ,  $\mu_w$  coefficient de frottement effectif aux parois latérales (rapport entre composantes tangentielle et normale de la contrainte).

**Bilan de forces** balance appliqué à une couche de grains en mouvement stationnaire :

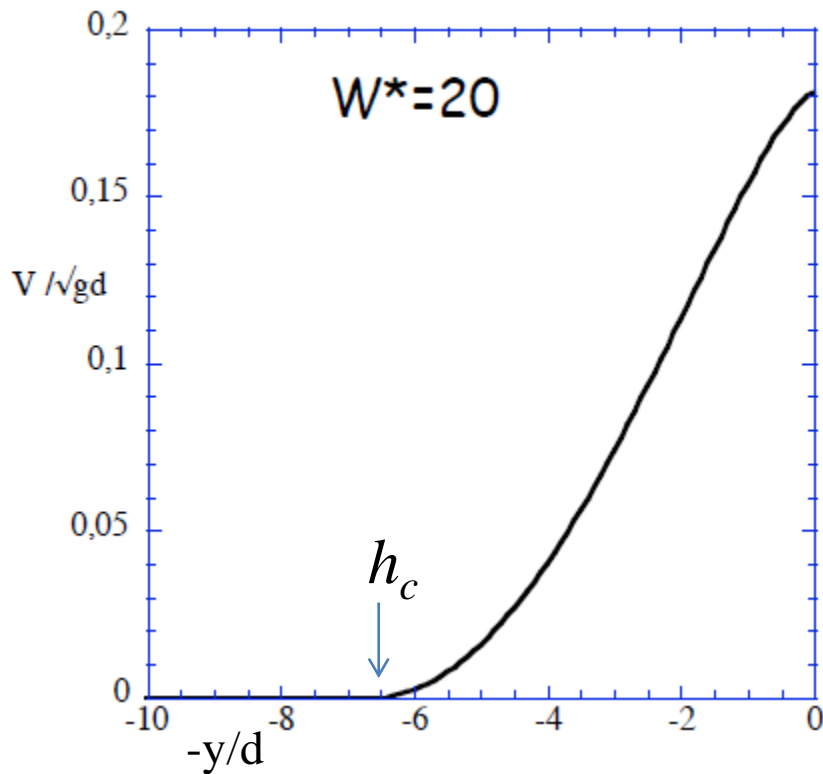
$$\tan \theta = \mu(I) + \mu_w y/W$$

$\mu(I)$  : coefficient de frottement effectif à la base de la couche.



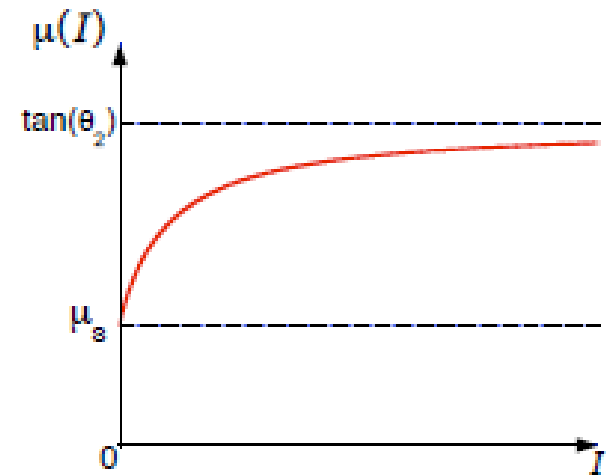
$$\tan \theta - \mu_w \frac{y}{W} = \mu(I)$$

$$I = \frac{\dot{\gamma}d}{\sqrt{P/\rho}} \Rightarrow \dot{\gamma}(y) \Rightarrow V(y)$$



P. Jop et al. , JFM 05

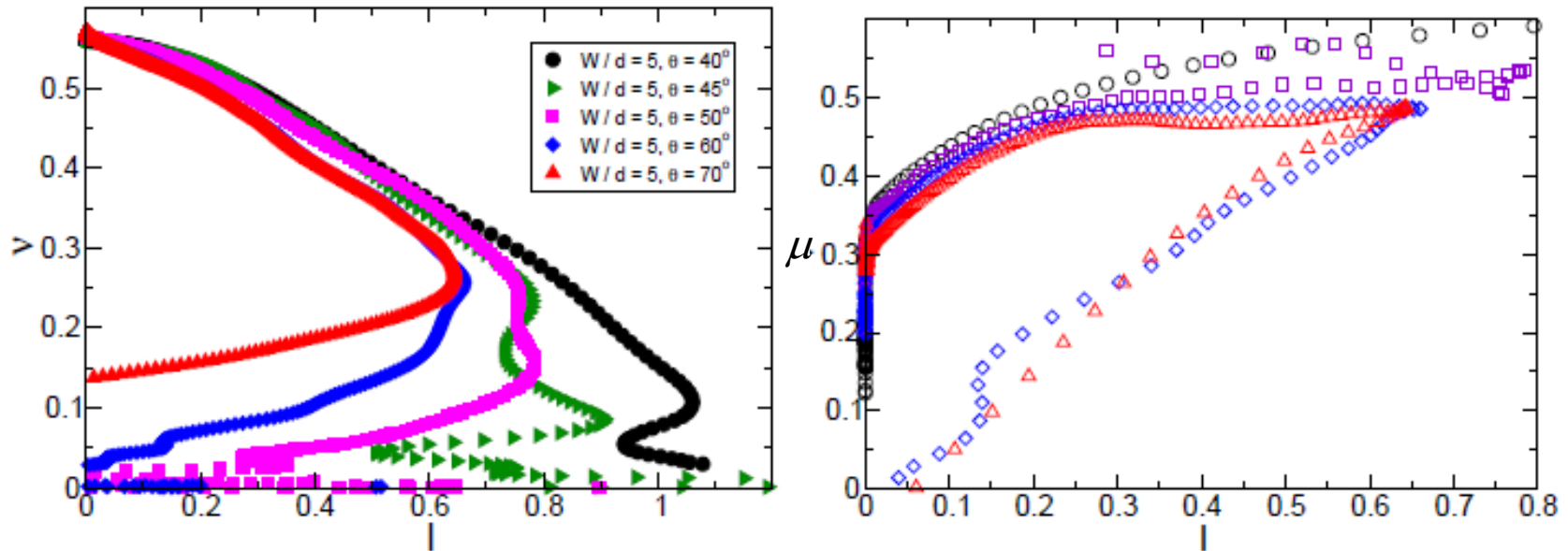
Calculé en prenant  $\mu_w$  constant



$$\mu(I) \geq \mu_s \Rightarrow \frac{h_c}{W} = \frac{\tan(\theta) - \mu_s}{\mu_w}$$

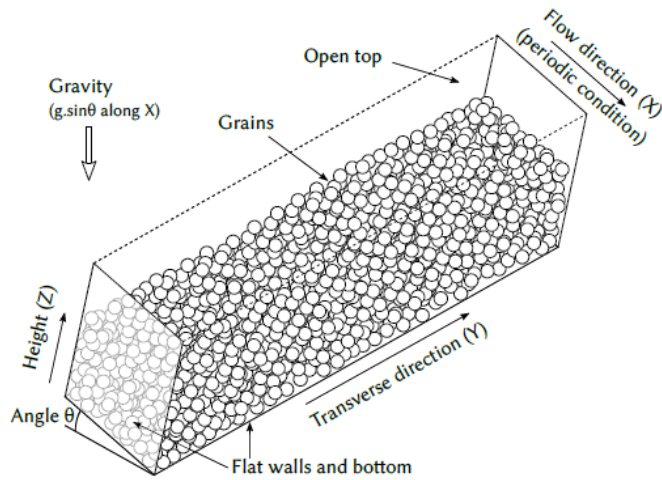
Arrêt pour une valeur critique.  
On ne retrouve pas la queue exponentielle du profil de vitesse

# Simulations numériques (DEM)



- Confirme les problèmes :
  - pour  $I = 0$  ( $\mu$  multivalué, prend des valeurs bien plus faibles que «  $\mu_s$  »)
  - Pour la zone diluée (collisionnelle)
- Plutôt qu'une valeur unique de  $\mu$  et  $\nu$  pour un  $I$  donné, on a plutôt une famille de courbes plus ou moins confondues sur un intervalle de  $I$  correspondant à des valeurs modérées.

# Les écoulements unidirectionnels sont plutôt l'exception que la règle...



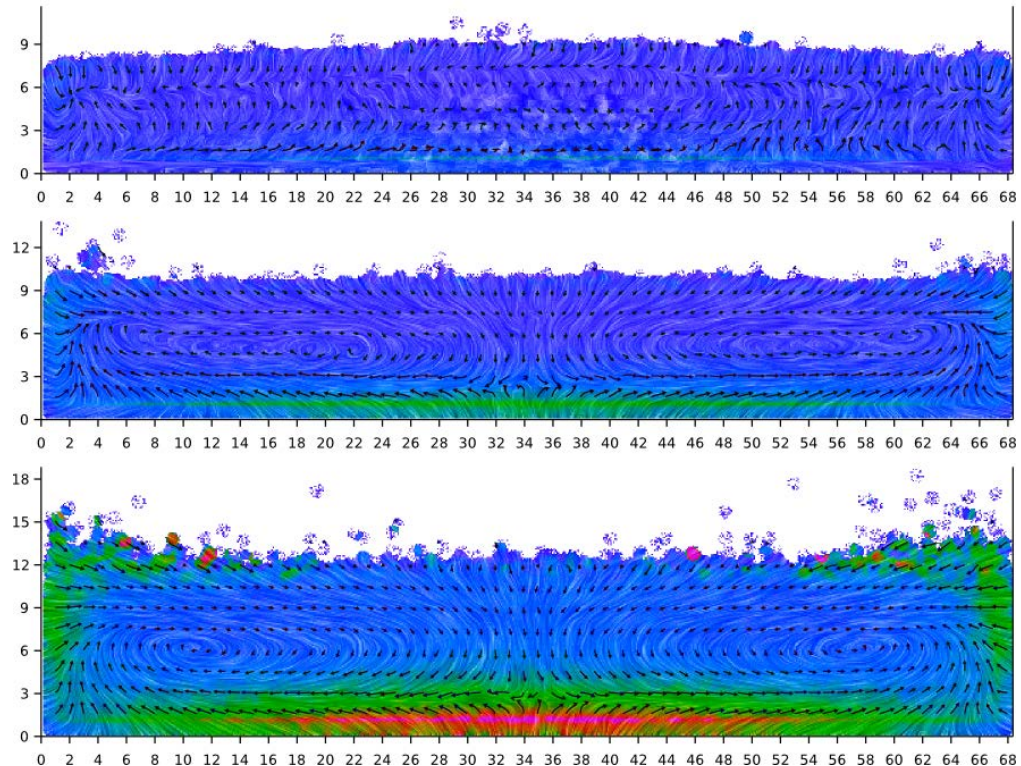
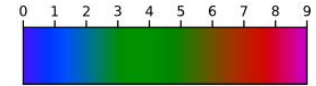
Écoulement  
Unidirectionnel

Observés sur fond rugueux : Y.  
Forterre, O. Pouliquen, P.R.L 2001, T.  
Börzsönyi, R. E. Ecke, J. McElwaine  
P.R.L. 2009

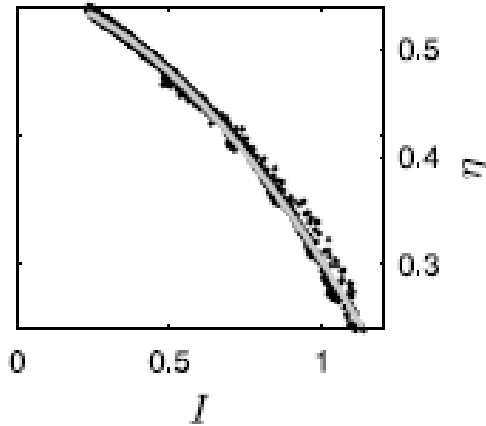
→  
Rouleaux

## carte des vitesses (section)

Arrows: Mean velocity in the YZ plane  
Color: Temperature  
From top to bottom:  $\theta = 17^\circ, 20^\circ, 23^\circ$

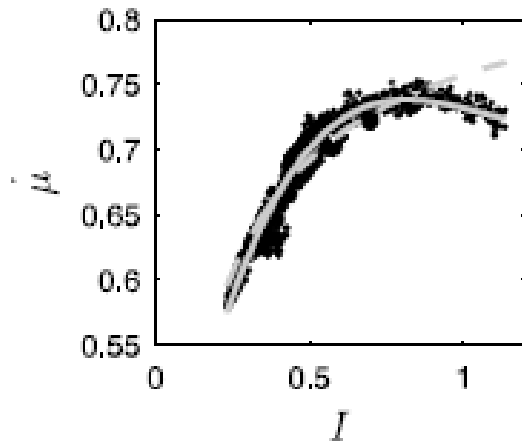


# Börzönyi, Phys. Rev. Lett. 2009



- La fraction volumique est une fonction décroissante de  $I$ .
- La rhéologie visco-plastique ne semble pas fonctionner :

$$\boldsymbol{\tau} \neq \frac{\mu p}{\|\mathbf{D}'\|} \mathbf{D}'$$



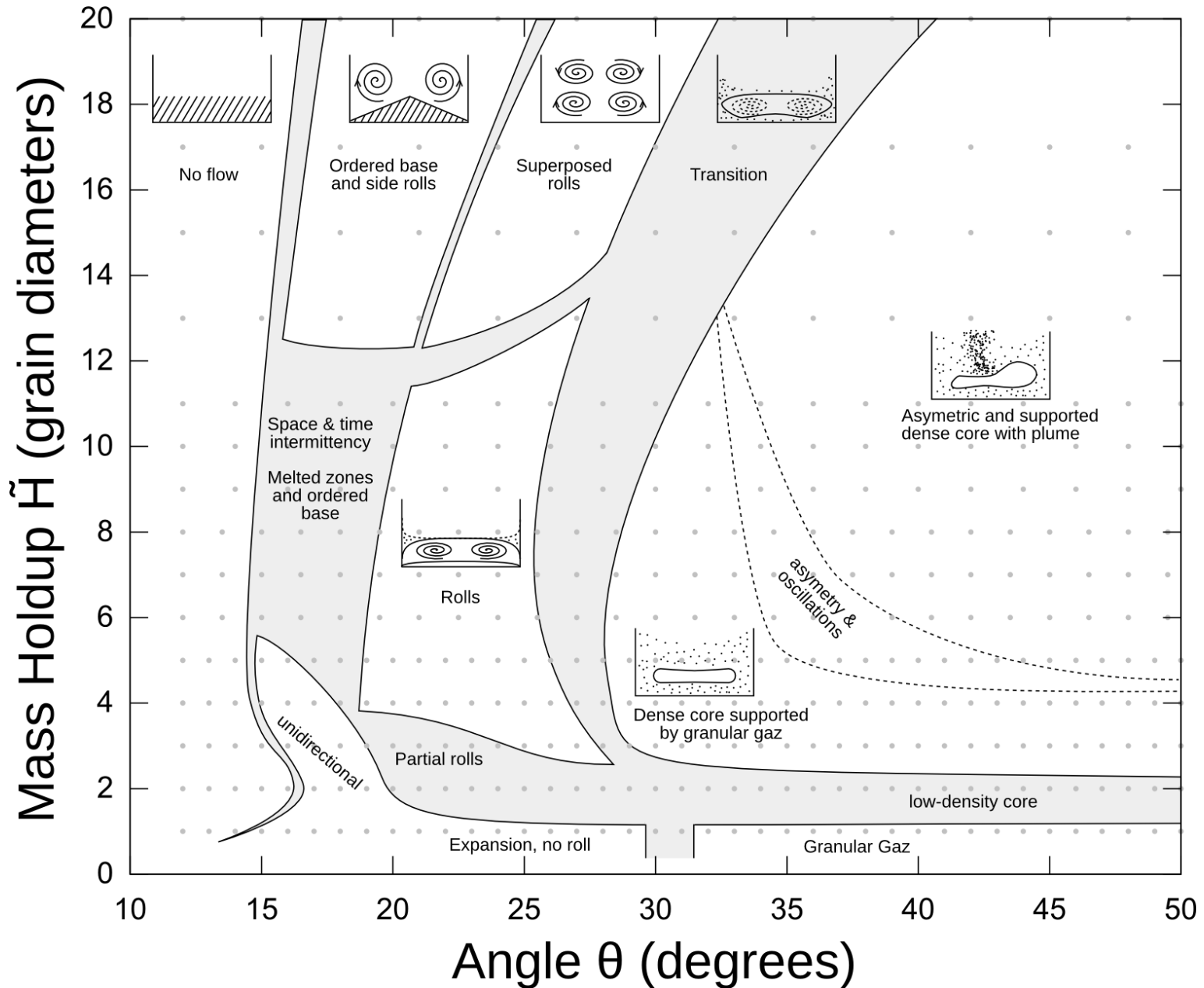
- Minimisation de l'écart obtenue par projection de  $\boldsymbol{\tau}$  sur  $\mathbf{D}'$  (à l'aide du produit scalaire de Frobénius) :

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\mathbf{D}'}{\|\mathbf{D}'\|} = \mu p \quad \longrightarrow \quad \mu = \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}'}{p \|\mathbf{D}'\|} = \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\tau} \mathbf{D}')}{p \|\mathbf{D}'\|}$$

Pointillé : modèle de Pouliquen

(meilleur ajustement)  $\mu(I) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{I_0/I + 1}$

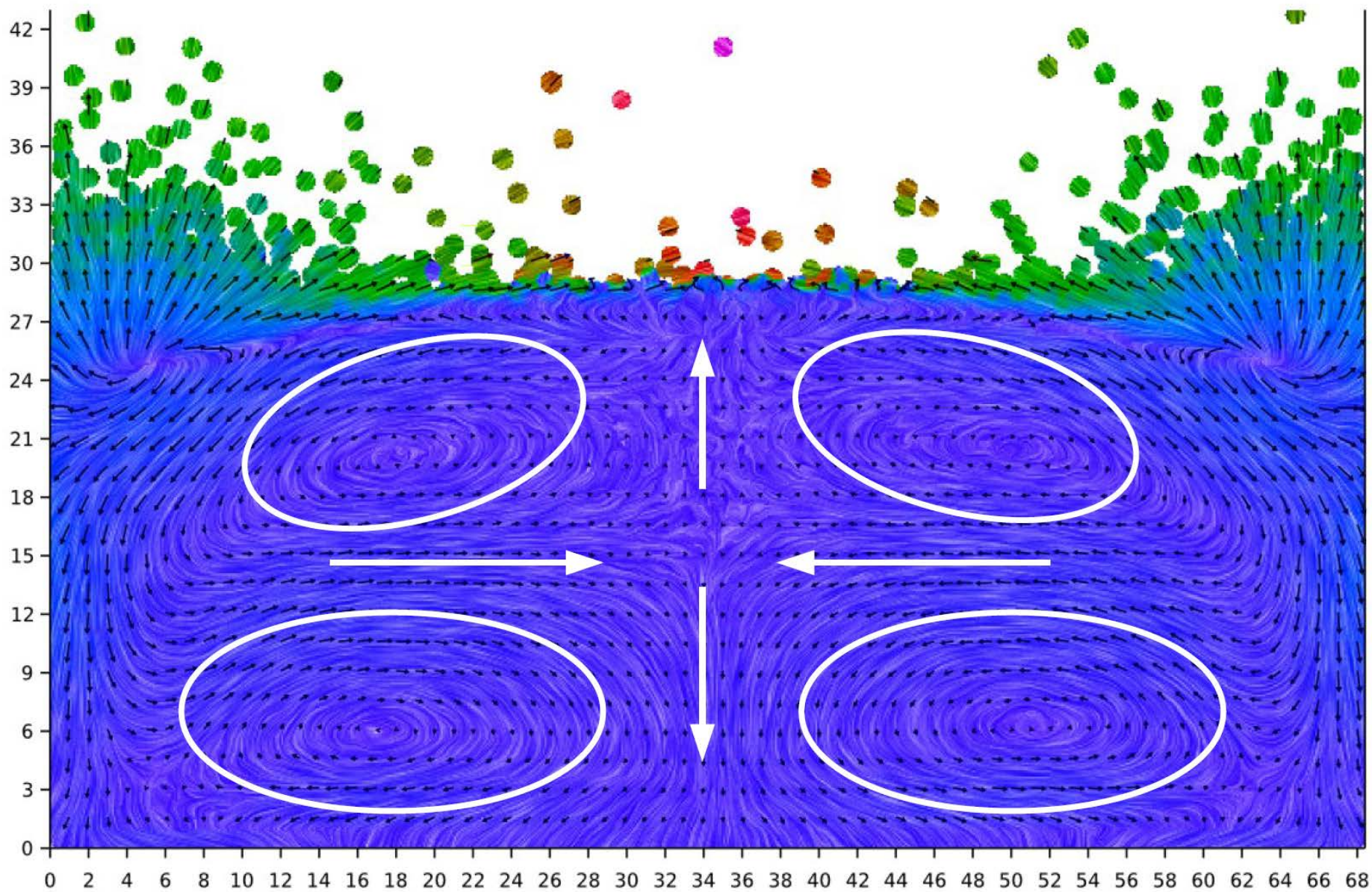
# Diagramme ( $\hat{H}$ , $\theta$ ) (N. Brodu 2013)





• Rouleaux empilés

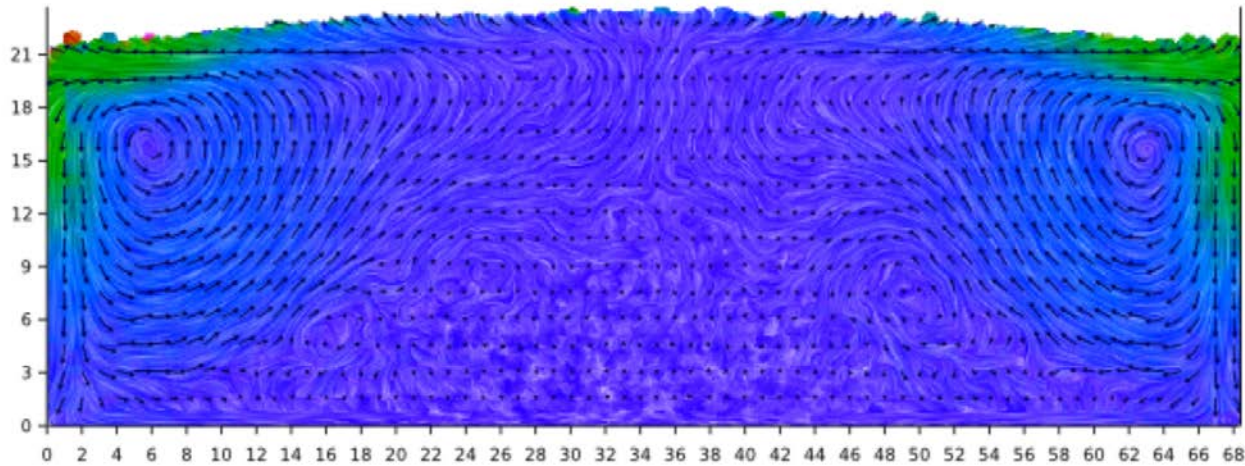
$\theta = 24^\circ$ ,  $\hat{H} = 15$



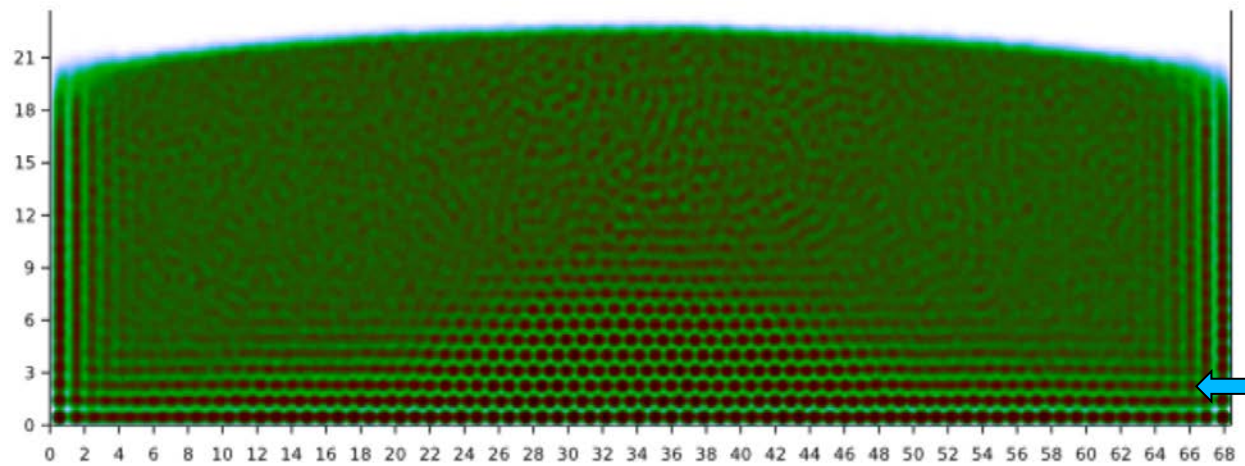


“Base” ordonnée et rouleaux latéraux

$$\theta=18^\circ, \hat{H}=13$$



Champ de vitesse dans la section

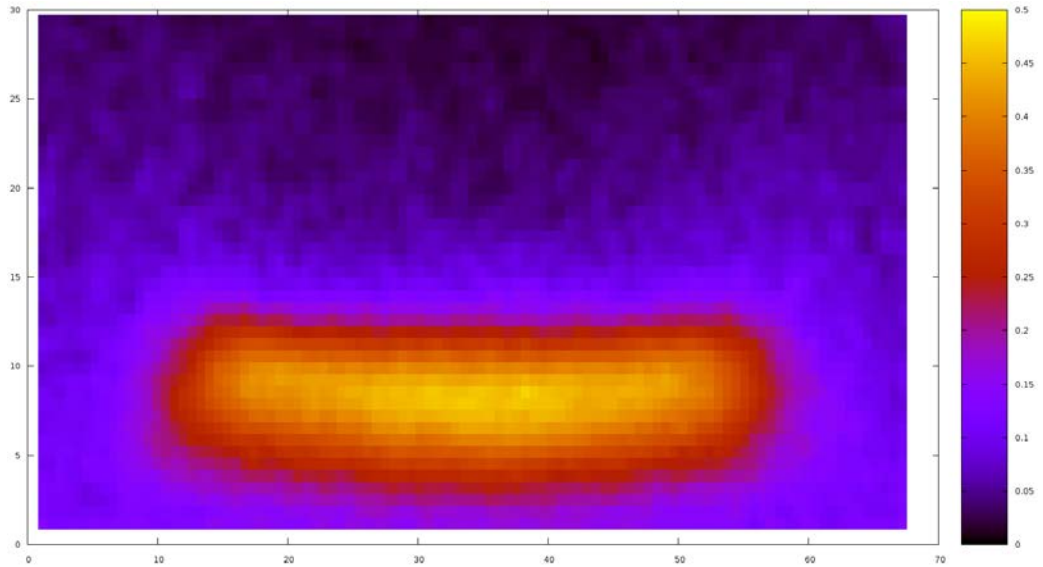


Fraction volumique dans la section

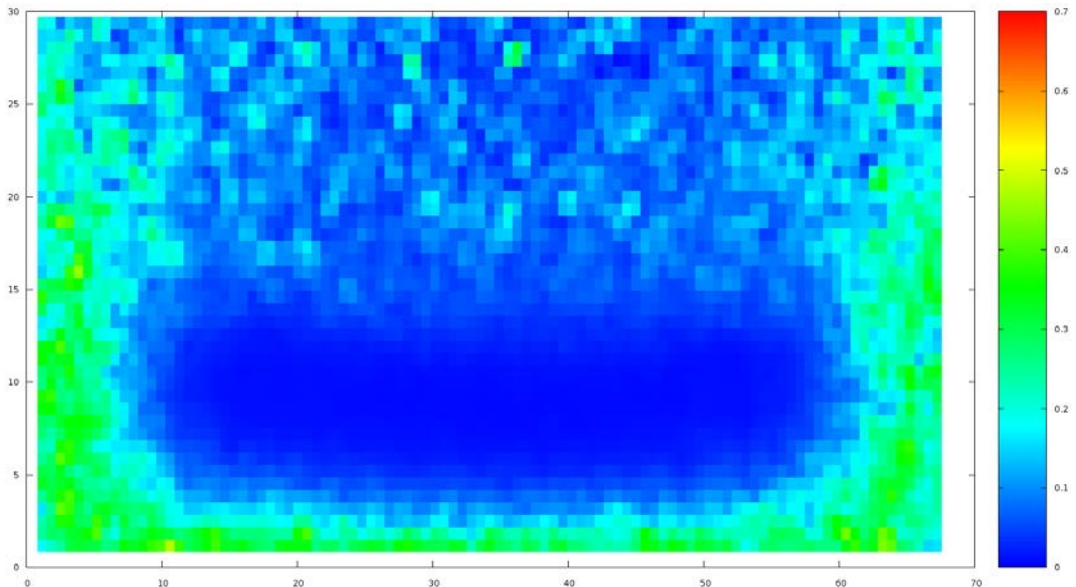
Zone ordonnée  
("crystal collisionnel")

# Ecoulement supporté (Stationnaire établi)

Champ de fraction volumique dans une section.  
Mise en évidence du noyau dense



Champ de température granulaire (fluctuations de vitesse) dans une section.  
Effet « Leidenfrost » ou caléfaction granulaire.  
Noyau « froid » en lévitation au dessus d'un fond « chaud »



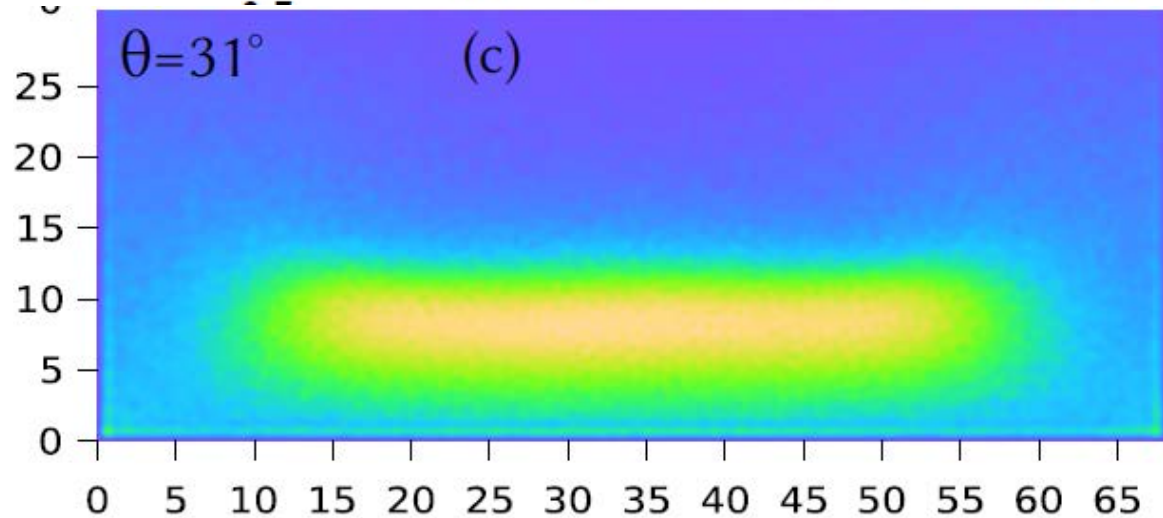
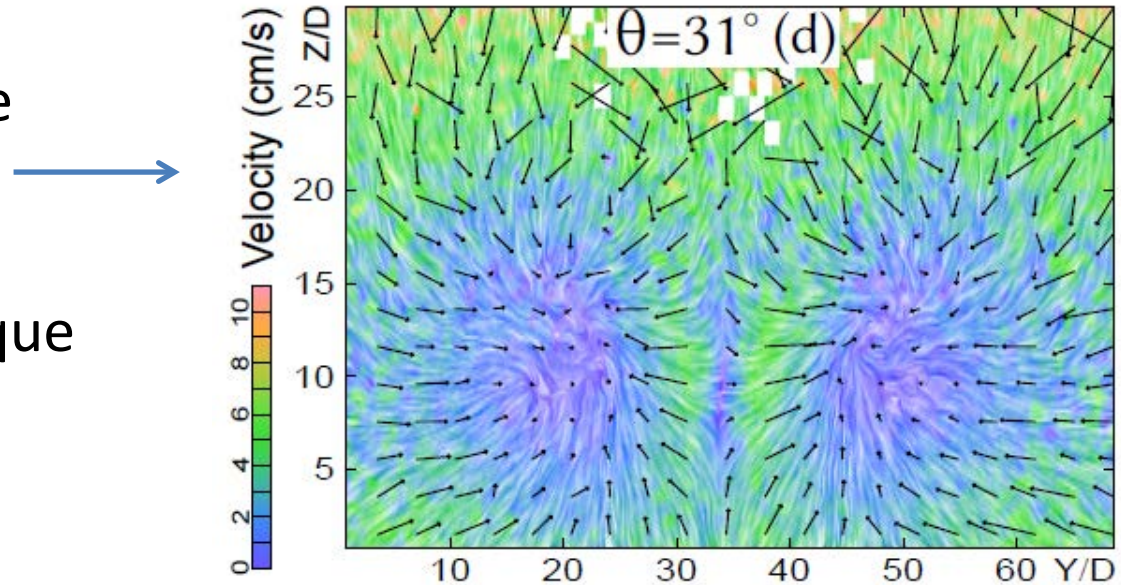
# Un noyau ... dynamique

Champ de vitesse dans une section

Champ de fraction volumique (même angle)

Le noyau n'est pas statique :

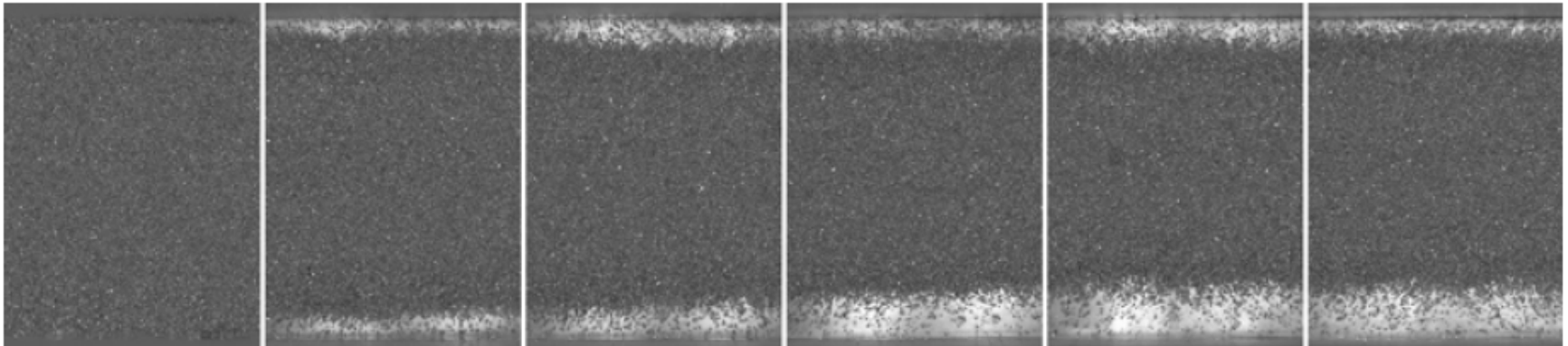
- échange de la matière
- Écoulement interne





A. Holyoake et J.  
McElwaine J. F. M. (2012)

- Ça c'est de la manipe!
- Permet (entre autres) de mesurer les vitesses de surface et le frottement effectif global (fond + parois)
- Mesure des angles  $\theta_1 \approx 28^\circ$  et  $\theta_2 \approx 34^\circ$  (qui donnent  $\mu_1 \approx 0,54$  et  $\mu_2 \approx 0,68$ )
- Ecoulement à angle  $> 38^\circ$  : semble supporté



# Comparaison expériences simulations

- Simulation numérique en volume fini à partir de la rhéologie viscoplastique utilisant les valeurs de  $\mu_1$  et  $\mu_2$  issues de l'expérience ( $I_0 = 0,3$  qui est une valeur typique).

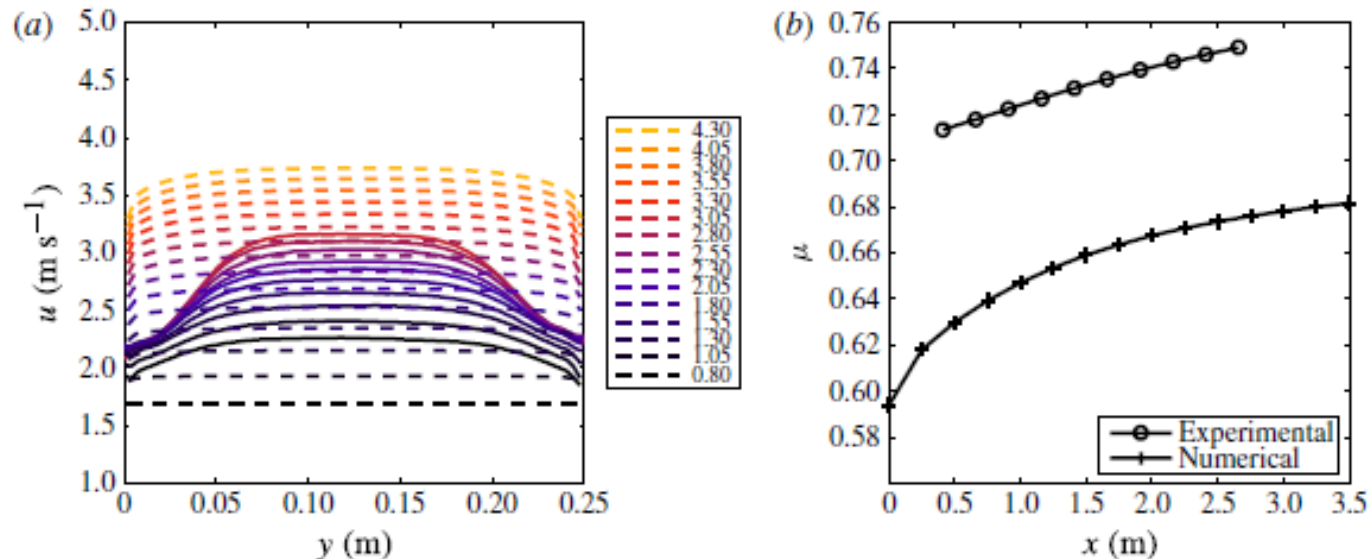


FIGURE 23. (Colour online) Experimental and simulation properties over a bumpy base at  $\theta = 38^\circ$  and  $q = 17.8 \text{ kg s}^{-1}$  using parameters  $\mu_1 = 0.54$ ,  $\mu_2 = 0.68 = \tan(34^\circ)$  and  $I_0 = 0.3$ : (a) surface velocities; (b) friction coefficient  $\mu$ .



Pour I ou contre I?  
That is the question...

