

# Un modèle de couche limite pour un écoulement à surface libre

Legrand Mathilde

Université d'Orléans, MAPMO

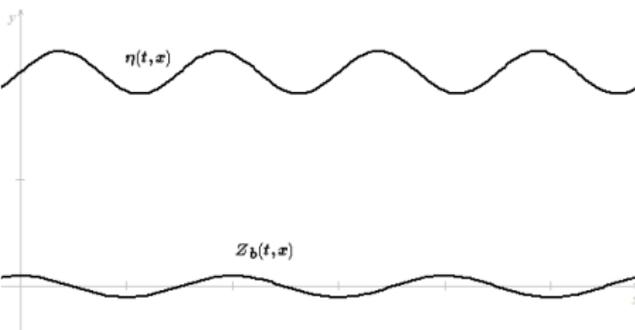
2 avril 2013  
1<sup>ère</sup> école EGRIN



- 1 Équations du fluide
- 2 Équation de Von Kármán
- 3 Équations intégrées
  - Équation de continuité
  - Équation de quantité de mouvement
  - Lien entre les différentes inconnues à  $O(\bar{\delta}^2)$  près
- 4 Système final obtenu
- 5 D'autres approches
  - Fluide parfait dans tout le domaine
  - Fluide parfait reposant sur une couche mince

## Position du problème

Fluide Newtonien, incompressible en régime laminaire, à surface libre



- 1 Équations du fluide
- 2 Équation de Von Kármán
- 3 Équations intégrées
  - Équation de continuité
  - Équation de quantité de mouvement
  - Lien entre les différentes inconnues à  $O(\bar{\delta}^2)$  près
- 4 Système final obtenu
- 5 D'autres approches
  - Fluide parfait dans tout le domaine
  - Fluide parfait reposant sur une couche mince

## Équations de Navier-Stokes adimensionnées

$$\partial_x u + \partial_y v = 0 \quad (1)$$

$$\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u = -\partial_x p + \frac{1}{Re_h} \Delta u \quad (2)$$

$$\partial_t v + u \partial_x v + v \partial_y v = -\partial_y p - \frac{1}{Fr^2} + \frac{1}{Re_h} \Delta v \quad (3)$$

avec

$$\begin{cases} Re_h = \frac{u_0 h_0}{\nu} \\ Fr = \frac{u_0}{\sqrt{gh_0}} \end{cases}$$

et les conditions limites :

$$\begin{cases} u = v = 0 \text{ quand } y = Z_b(t, x) \\ v = \partial_t \eta + u \partial_x \eta \text{ quand } y = \eta(t, x) \\ p = 0 \text{ quand } y = \eta(t, x) \\ \partial_y u = 0 \text{ quand } y = \eta(t, x). \end{cases}$$

## Équations d'Euler

### Équations pour le fluide parfait

$$\partial_x u + \partial_y v = 0$$

$$\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u = -\partial_x p$$

$$\partial_t v + u \partial_x v + v \partial_y v = -\partial_y p - \frac{1}{Fr^2}$$

$$\partial_t \eta + u \partial_x \eta = v \quad \text{en } y = \eta(t, x)$$

$$-u Z'_b + v = 0 \quad \text{en } y = Z_b(x).$$

## Équations de Prandtl

$\bar{\delta}$  petit paramètre :

$$\bar{x} = x; \quad \bar{\delta} \bar{y} = y; \quad \bar{t} = t; \quad \bar{p} = p; \quad \bar{u} = u; \quad \bar{\delta} \bar{v} = v; \quad \bar{\delta} \bar{Z}_b(\bar{x}) = Z_b(x)$$

$$\partial_{\bar{x}} \bar{u} + \partial_{\bar{y}} \bar{v} = 0$$

$$\partial_{\bar{t}} \bar{u} + \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{u} + \bar{v} \partial_{\bar{y}} \bar{u} = -\partial_{\bar{x}} \bar{p} + \frac{1}{Re_h} \partial_{\bar{x}}^2 \bar{u} + \frac{1}{Re_h} \frac{1}{\bar{\delta}^2} \partial_{\bar{y}}^2 \bar{u}$$

$$\bar{\delta} \partial_{\bar{t}} \bar{v} + \bar{\delta} \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{v} + \bar{\delta} \bar{v} \partial_{\bar{y}} \bar{v} = -\frac{1}{\bar{\delta}} \partial_{\bar{y}} \bar{p} - \frac{1}{Fr^2} + \frac{1}{Re_h} \frac{1}{\bar{\delta}} (\bar{\delta}^2 \partial_{\bar{x}}^2 \bar{v} + \partial_{\bar{y}}^2 \bar{v})$$

## Équations de Prandtl

$\bar{\delta}$  petit paramètre :

$$\bar{x} = x; \quad \bar{\delta} \bar{y} = y; \quad \bar{t} = t; \quad \bar{p} = p; \quad \bar{u} = u; \quad \bar{\delta} \bar{v} = v; \quad \bar{\delta} \bar{Z}_b(\bar{x}) = Z_b(x)$$

$$\partial_{\bar{x}} \bar{u} + \partial_{\bar{y}} \bar{v} = 0$$

$$\partial_{\bar{t}} \bar{u} + \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{u} + \bar{v} \partial_{\bar{y}} \bar{u} = -\partial_{\bar{x}} \bar{p} + \frac{1}{Re_h} \partial_{\bar{x}}^2 \bar{u} + \frac{1}{Re_h} \frac{1}{\bar{\delta}^2} \partial_{\bar{y}}^2 \bar{u}$$

$$\bar{\delta} \partial_{\bar{t}} \bar{v} + \bar{\delta} \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{v} + \bar{\delta} \bar{v} \partial_{\bar{y}} \bar{v} = -\frac{1}{\bar{\delta}} \partial_{\bar{y}} \bar{p} - \frac{1}{Fr^2} + \frac{1}{Re_h} \frac{1}{\bar{\delta}} (\bar{\delta}^2 \partial_{\bar{x}}^2 \bar{v} + \partial_{\bar{y}}^2 \bar{v})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Re_h} \frac{1}{\bar{\delta}^2} \sim 1.$$

## Équations de Prandtl

$\bar{\delta}$  petit paramètre :

$$\bar{x} = x; \quad \bar{\delta} \bar{y} = y; \quad \bar{t} = t; \quad \bar{p} = p; \quad \bar{u} = u; \quad \bar{\delta} \bar{v} = v; \quad \bar{\delta} \bar{Z}_b(\bar{x}) = Z_b(x)$$

$$\partial_{\bar{x}} \bar{u} + \partial_{\bar{y}} \bar{v} = 0$$

$$\partial_{\bar{t}} \bar{u} + \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{u} + \bar{v} \partial_{\bar{y}} \bar{u} = -\partial_{\bar{x}} \bar{p} + \frac{1}{Re_h} \partial_{\bar{x}}^2 \bar{u} + \frac{1}{Re_h} \frac{1}{\bar{\delta}^2} \partial_{\bar{y}}^2 \bar{u}$$

$$\bar{\delta} \partial_{\bar{t}} \bar{v} + \bar{\delta} \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{v} + \bar{\delta} \bar{v} \partial_{\bar{y}} \bar{v} = -\frac{1}{\bar{\delta}} \partial_{\bar{y}} \bar{p} - \frac{1}{Fr^2} + \frac{1}{Re_h} \frac{1}{\bar{\delta}} (\bar{\delta}^2 \partial_{\bar{x}}^2 \bar{v} + \partial_{\bar{y}}^2 \bar{v})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Re_h} \frac{1}{\bar{\delta}^2} \sim 1.$$

Equations de Prandtl adimensionnées

$$\partial_{\bar{x}} \bar{u} + \partial_{\bar{y}} \bar{v} = 0$$

$$\partial_{\bar{t}} \bar{u} + \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{u} + \bar{v} \partial_{\bar{y}} \bar{u} = -\partial_{\bar{x}} \bar{p} + \partial_{\bar{y}}^2 \bar{u}$$

$$0 = \partial_{\bar{y}} \bar{p}$$

## Équations de Prandtl

Transformation de Prandtl :

$$\begin{aligned} \bullet \bar{x} &= \tilde{x} \\ \bullet \bar{y} &= \tilde{y} - \tilde{Z}_b \\ \bullet \bar{t} &= \tilde{t}. \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \bullet \partial_{\bar{y}} &= \partial_{\tilde{y}}; \\ \bullet \partial_{\bar{x}} &= \partial_{\tilde{x}} - \tilde{Z}_b' \partial_{\tilde{y}}. \end{aligned}$$

Choix pour  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$  :

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{x}} \bar{u} + \partial_{\bar{y}} \bar{v} &= 0 \\ \partial_{\bar{x}} \bar{u} - \tilde{Z}_b' \partial_{\tilde{y}} \bar{u} + \partial_{\tilde{y}} \bar{v} &= 0 \\ \partial_{\bar{x}} \bar{u} + \partial_{\tilde{y}} (\bar{v} - \tilde{Z}_b' \bar{u}) &= 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \bar{u} = \tilde{u} \\ \bar{v} = \tilde{v} - \tilde{Z}_b' \tilde{u} \end{cases}$$

## Équations de Prandtl

### Équations de Prandtl sur fond plat

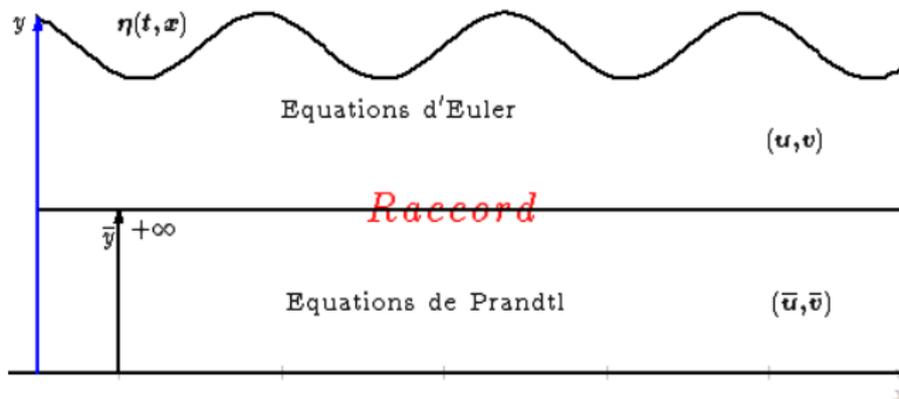
$$\partial_{\bar{x}}\bar{u} + \partial_{\bar{y}}\bar{v} = 0 \quad (4)$$

$$\partial_{\bar{t}}\bar{u} + \bar{u}\partial_{\bar{x}}\bar{u} + \bar{v}\partial_{\bar{y}}\bar{u} = -\partial_{\bar{x}}\bar{p} + \partial_{\bar{y}}^2\bar{u} \quad (5)$$

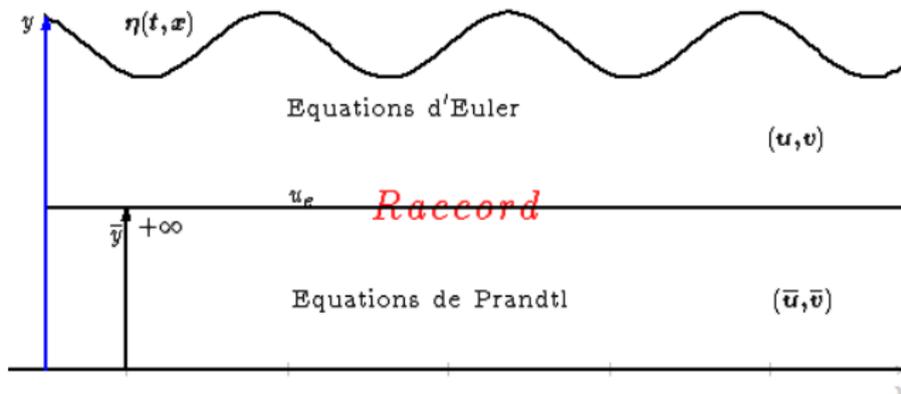
$$0 = \partial_{\bar{y}}\bar{p} \quad (6)$$

$$\bar{u} = \bar{v} = 0 \text{ en } \bar{y} = 0. \quad (7)$$

## Deux "couches" de fluide



## Deux "couches" de fluide



$U_e(t, x) = U(t, x, Z_b)$  : vecteur vitesse au fond pour le fluide parfait.

Equation sur  $u_e$

$$\partial_t u_e(t, x) + u_e(t, x) \partial_x u_e(t, x) = -\partial_x p(t, x, Z_b(x))$$

- 1 Équations du fluide
- 2 Équation de Von Kármán
- 3 Équations intégrées
  - Équation de continuité
  - Équation de quantité de mouvement
  - Lien entre les différentes inconnues à  $O(\delta^2)$  près
- 4 Système final obtenu
- 5 D'autres approches
  - Fluide parfait dans tout le domaine
  - Fluide parfait reposant sur une couche mince

## Équation de Von Kármán

$$\partial_t u_e(t, x) + u_e(t, x) \partial_x u_e(t, x) = -\partial_x p(t, x, Z_b(x)) \quad (*)$$

$$\partial_{\bar{t}} \bar{u} + \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{u} + \bar{v} \partial_{\bar{y}} \bar{u} = -\partial_{\bar{x}} \bar{p} + \partial_{\bar{y}}^2 \bar{u} \quad (**)$$

## Équation de Von Kármán

$$\partial_t u_e(t, x) + u_e(t, x) \partial_x u_e(t, x) = -\partial_x p(t, x, Z_b(x)) \quad (*)$$

$$\partial_{\bar{t}} \bar{u} + \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{u} + \bar{v} \partial_{\bar{y}} \bar{u} = -\partial_{\bar{x}} \bar{p} + \partial_{\bar{y}}^2 \bar{u} \quad (**)$$

Équation de défaut de vitesse :

$$\partial_t (u_e - \bar{u}) + u_e \partial_x u_e - \bar{u} \partial_x \bar{u} - \bar{v} \partial_y \bar{u} = -\partial_y^2 \bar{u}.$$

## Équation de Von Kármán

$$\partial_t u_e(t, x) + u_e(t, x) \partial_x u_e(t, x) = -\partial_x p(t, x, Z_b(x)) \quad (*)$$

$$\partial_{\bar{t}} \bar{u} + \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{u} + \bar{v} \partial_{\bar{y}} \bar{u} = -\partial_{\bar{x}} \bar{p} + \partial_{\bar{y}}^2 \bar{u} \quad (**)$$

Équation de défaut de vitesse :

$$\partial_t (u_e - \bar{u}) + u_e \partial_x u_e - \bar{u} \partial_x \bar{u} - \bar{v} \partial_{\bar{y}} \bar{u} = -\partial_{\bar{y}}^2 \bar{u}.$$

Intégration selon  $\bar{y}$  :

$$\begin{aligned} \partial_t \left( \int_0^{+\infty} (u_e - \bar{u}) d\bar{y} \right) + \partial_x u_e \int_0^{+\infty} (u_e - \bar{u}) d\bar{y} + \int_0^{+\infty} \bar{u} \partial_x (u_e - \bar{u}) d\bar{y} \\ - \int_0^{+\infty} \bar{u} \partial_x \bar{u} d\bar{y} + u_e \int_0^{+\infty} \partial_x \bar{u} d\bar{y} = \partial_{\bar{y}} \bar{u} |_{\bar{y}=0}. \end{aligned}$$

## Équation de Von Kármán

$$\delta_1(t, x) = \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{\bar{u}}{u_e}\right) d\bar{y} \quad \text{Épaisseur de déplacement}$$

$$\delta_2(t, x) = \int_0^{+\infty} \frac{\bar{u}}{u_e} \left(1 - \frac{\bar{u}}{u_e}\right) d\bar{y} \quad \text{Épaisseur de quantité de mouvement}$$

### Proposition

On possède alors une équation faisant intervenir  $u_e$ ,  $\delta_1$  et  $\delta_2$  :

$$\partial_t(u_e \delta_1) + u_e \delta_1 \partial_x u_e + \partial_x(u_e^2 \delta_2) = \partial_{\bar{y}} \bar{u}|_{\bar{y}=0}. \quad (8)$$

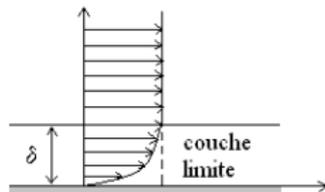
sans oublier l'équation sur  $u_e$  établie précédemment :

$$\partial_t u_e + u_e \partial_x u_e = -\partial_x p|_{y=Z_b} \quad (9)$$

## Élimination de $\delta_2$

Soit un profil de vitesse  $\varphi$  tel que :

$$\begin{cases} \varphi(t, x, \frac{\bar{y}}{\delta_1(t, x)}) = \frac{\bar{u}(t, x, \bar{y})}{u_e(t, x)} \\ \varphi(t, x, 0) = 0 \\ \varphi(t, x, +\infty) = 1 \\ \int_0^{+\infty} (1 - \varphi) d\bar{y} = 1. \end{cases}$$



On a alors une réécriture de  $\delta_2$  :

$$\delta_2 = \delta_1 H^{-1}$$

avec  $H^{-1} = \int_0^{+\infty} \varphi(1 - \varphi) d\bar{y}$ .

- 1 Équations du fluide
- 2 Équation de Von Kármán
- 3 **Équations intégrées**
  - Équation de continuité
  - Équation de quantité de mouvement
  - Lien entre les différentes inconnues à  $O(\bar{\delta}^2)$  près
- 4 Système final obtenu
- 5 D'autres approches
  - Fluide parfait dans tout le domaine
  - Fluide parfait reposant sur une couche mince

## Équation de continuité

Intégration de l'équation de continuité  $\partial_x \bar{u} + \partial_y \bar{v} = 0$

$$\implies v(t, x, \eta) = v(t, x, Z_b) - \partial_x \left( \int_{Z_b}^{\eta} u \, dy \right) + u(t, x, \eta) \partial_x \eta - u(t, x, Z_b) Z_b'$$

Cinématique à la surface + condition d'adhérence :

$$\implies \partial_t h + \partial_x \left( \int_{Z_b}^{\eta} u \, dy \right) = 0.$$

### Définition

On définit  $\tilde{U}$  par la relation :

$$h\tilde{U} = \int_{Z_b}^{\eta} u \, dy.$$

$$\partial_t h + \partial_x (h\tilde{U}) = 0 \tag{10}$$

## Équation de quantité de mouvement

Équation de quantité de mouvement :  $\partial_t \bar{u} + \bar{u} \partial_x \bar{u} + \bar{v} \partial_y \bar{u} = -\partial_x \bar{p} + \partial_y^2 \bar{u}$ .

Intégration entre  $Z_b$  et  $\eta$  en exploitant :

$$\partial_x u + \partial_y v = 0$$

$$\partial_t \eta + u \partial_x \eta = v \quad \text{en } y = \eta(t, x)$$

$$u = v = 0 \quad \text{en } y = Z_b$$

On obtient :

$$\partial_t \left( \int_{Z_b}^{\eta} u \, dy \right) + \partial_x \left( \int_{Z_b}^{\eta} u^2 \, dy \right) = - \int_{Z_b}^{\eta} \partial_x p \, dy - \bar{\delta}^2 \partial_y u|_{y=Z_b}. \quad (11)$$

## Réduction du nombre d'inconnues

Approximation de  $h\tilde{U}$

$$h\tilde{U} = hu_e - \bar{\delta}u_e\delta_1.$$

## Réduction du nombre d'inconnues

Approximation de  $h\tilde{U}$

$$h\tilde{U} = hu_e - \bar{\delta}u_e\delta_1.$$

$$h\tilde{U} = - \int_{z_b}^{\eta} (u_e - u) dy + \int_{z_b}^{\eta} u_e dy$$

## Réduction du nombre d'inconnues

Approximation de  $h\tilde{U}$

$$h\tilde{U} = hu_e - \bar{\delta}u_e\delta_1.$$

$$h\tilde{U} = - \int_{z_b}^{\eta} (u_e - u) dy + \int_{z_b}^{\eta} u_e dy$$

Approximation de  $\int_{z_b}^{\eta} u^2$

$$\int_{z_b}^{\eta} u^2 = h\tilde{U}^2 + \bar{\delta}\tilde{U}(\delta_1 - \delta_2)$$

- 1 Équations du fluide
- 2 Équation de Von Kármán
- 3 Équations intégrées
  - Équation de continuité
  - Équation de quantité de mouvement
  - Lien entre les différentes inconnues à  $O(\delta^2)$  près
- 4 **Système final obtenu**
- 5 D'autres approches
  - Fluide parfait dans tout le domaine
  - Fluide parfait reposant sur une couche mince

## Systeme complet

### Hypothèse hydrostatique

L'hypothèse hydrostatique donne  $p(t, x, y) = g(\eta(t, x) - y)$  et de là

$$\int_{z_b}^{\eta} \partial_x p = g \partial_x \left( \frac{h^2}{2} \right) + gh Z'_b$$

## Système complet

Le système obtenu est :

$$\partial_t h + \partial_x (h\tilde{U}) = 0 \quad (12)$$

$$\partial_t (h\tilde{U}) + \partial_x (h\tilde{U}^2 + \frac{g}{2} h^2 + \bar{\delta}\tilde{U}^2 \delta_1 (1 - H^{-1})) = -ghZ'_b - \bar{\delta}\tau_1 \quad (13)$$

$$\partial_t (u_e \delta_1) + u_e \delta_1 \partial_x u_e + \partial_x (u_e^2 \delta_1 H^{-1}) = \tau_1 \quad (14)$$

$$\partial_t u_e + u_e \partial_x u_e = -g \partial_x h - gZ'_b \quad (15)$$

où  $\tau_1 = \partial_{\bar{y}} \bar{u}|_{\bar{y}=0}$ .

## Systeme complet

Le système obtenu est :

$$\partial_t h + \partial_x (h\tilde{U}) = 0 \quad (12)$$

$$\partial_t (h\tilde{U}) + \partial_x (h\tilde{U}^2 + \frac{g}{2} h^2 + \bar{\delta}\tilde{U}^2 \delta_1 (1 - H^{-1})) = -ghZ'_b - \bar{\delta}\tau_1 \quad (13)$$

$$\partial_t (u_e \delta_1) + u_e \delta_1 \partial_x u_e + \partial_x (u_e^2 \delta_1 H^{-1}) = \tau_1 \quad (14)$$

$$\partial_t u_e + u_e \partial_x u_e = -g \partial_x h - gZ'_b \quad (15)$$

où  $\tau_1 = \partial_{\bar{y}} \bar{u}|_{\bar{y}=0}$ .

Avec  $\bar{\delta} = 0$

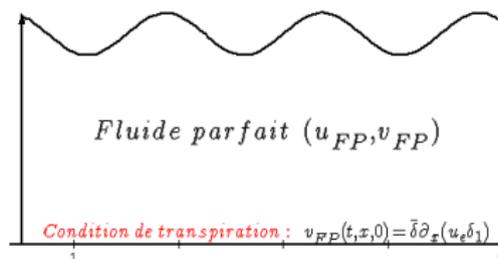
On retrouve les équations de Saint Venant sans frottements :

$$\partial_t h + \partial_x (h\tilde{U}) = 0$$

$$\partial_t (h\tilde{U}) + \partial_x (h\tilde{U}^2 + \frac{g}{2} h^2) = -ghZ'_b$$

- 1 Équations du fluide
- 2 Équation de Von Kármán
- 3 Équations intégrées
  - Équation de continuité
  - Équation de quantité de mouvement
  - Lien entre les différentes inconnues à  $O(\delta^2)$  près
- 4 Système final obtenu
- 5 D'autres approches
  - Fluide parfait dans tout le domaine
  - Fluide parfait reposant sur une couche mince

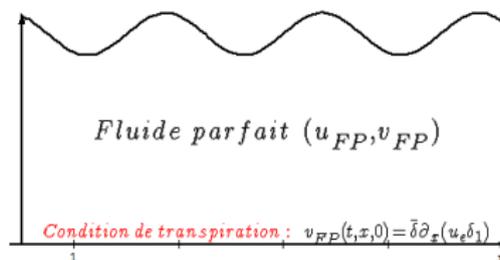
## Fluide parfait + condition de transpiration



Etude asymptotique  $\bar{v}$  en  $+\infty$  et  $v_{FP}$  en  $y = 0$

$$\implies v_{FP}(t, x, 0) = \bar{\delta} \partial_x (u_e \delta_1)$$

## Fluide parfait + condition de transpiration



Etude asymptotique  $\bar{v}$  en  $+\infty$  et  $v_{FP}$  en  $y = 0$

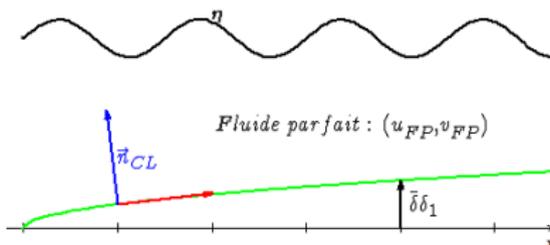
$$\implies v_{FP}(t, x, 0) = \bar{\delta} \partial_x (u_e \delta_1)$$

Deux équations intégrées :

$$\partial_t h + \partial_x \left( \int_0^\eta u_{FP} \right) - \bar{\delta} \partial_x (u_e \delta_1) = 0$$

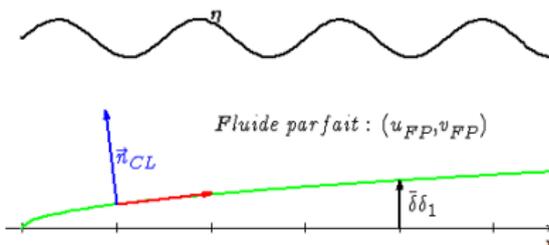
$$\partial_t \left( \int_0^\eta u_{FP} \right) + \partial_x \left( \int_0^\eta u_{FP}^2 \right) - \bar{\delta} u_{FP}(x, 0) \partial_x (u_e \delta_1) = -gh \partial_x \eta$$

## Fluide parfait reposant sur la couche limite



Glissement  $\implies v_{FP}(t, x, \bar{\delta}\delta_1) = \bar{\delta}u_{FP}(t, x, \bar{\delta}\delta_1)\partial_x \delta_1.$

## Fluide parfait reposant sur la couche limite



Glissement  $\implies v_{FP}(t, x, \bar{\delta}\delta_1) = \bar{\delta}u_{FP}(t, x, \bar{\delta}\delta_1)\partial_x \delta_1$ .

Deux équations intégrées :

$$\partial_t h + \partial_x \left( \int_{\bar{\delta}\delta_1}^{\eta} u_{FP} \right) = 0$$

$$\partial_t \left( \int_{\bar{\delta}\delta_1}^{\eta} u_{FP} \right) + \partial_x \left( \int_{\bar{\delta}\delta_1}^{\eta} u_{FP}^2 \right) = -g(\eta - \bar{\delta}\delta_1)\partial_x \eta$$