

# Introduction aux rhéologies granulaires et à leur résolution numérique

**F. Bouchut<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*LAMA, CNRS & Université Paris-Est-Marne-la-Vallée*

5ème Ecole EGRIN, Mai-Juin 2017



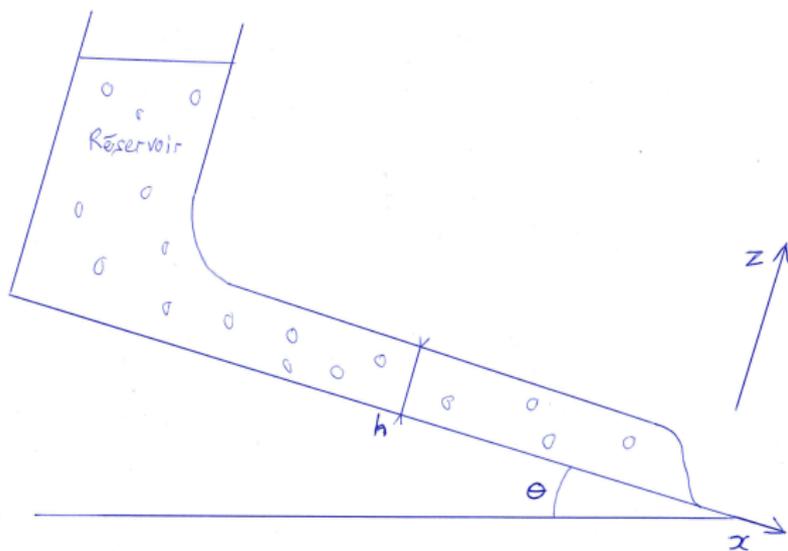
- 1 *Ecoulements granulaires de laboratoire et rhéologie  $\mu(I)$*
- 2 *Modèles viscoplastiques incompressibles et leur résolution numérique*
- 3 *Nécessité de modèles viscoplastiques compressibles*

Les références citées **en vert** sont détaillées en fin de document.

# I. Ecoulements granulaires de laboratoire et rhéologie $\mu(I)$

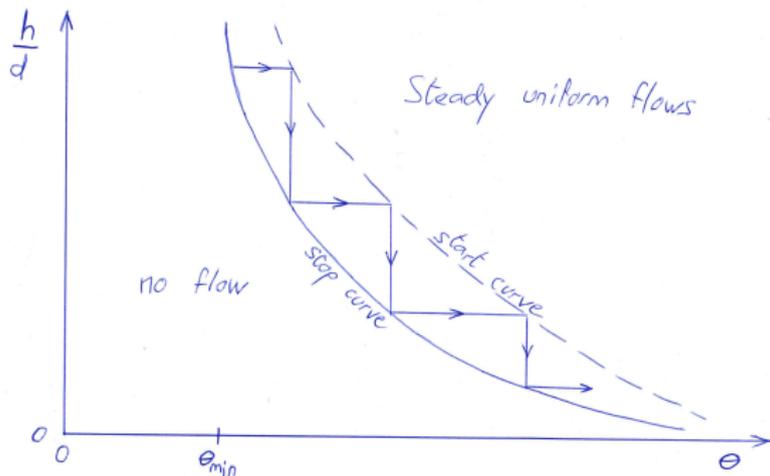
Matériau granulaire sec (pas de fluide interstitiel)

Pouliquen 1999, Pouliquen-Forterre 2002. Lâcher de matériau granulaire (billes de verre) sur un plan incliné d'angle  $\theta$ .



Pour quels  $h$ ,  $\theta$  observe-t-on un **écoulement uniforme** selon la direction  $x$  de l'écoulement ?

▷ Il faut que  $h \geq h_{stop}(\theta)$ , et  $\theta \geq \theta_{min}$ .



► Observation lorsqu'on n'a pas d'alimentation en granulaire : on démarre avec une épaisseur uniforme  $h$  à l'arrêt, et on incline progressivement le plan (on augmente  $\theta$ ). A l'angle  $\theta_{start}(h)$  on observe le démarrage d'une avalanche. Puis  $h$  diminue spontanément jusqu'à  $h_{stop}(\theta)$  où l'écoulement s'arrête. Notation :

$$\theta = \theta_{start}(h) \Leftrightarrow h = h_{start}(\theta), \quad \theta = \theta_{stop}(h) \Leftrightarrow h = h_{stop}(\theta).$$

On a toujours

$$h_{start}(\theta) > h_{stop}(\theta), \quad \theta_{start}(h) > \theta_{stop}(h).$$

▷ En écoulement uniforme de vitesse moyenne  $\bar{u}$  on a

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} = \beta \frac{h}{h_{stop}(\theta)},$$

avec  $\beta \simeq 0.136$ . En particulier  $\bar{u}/\sqrt{gh} \geq \beta$ , et

$$\theta = \theta_{stop} \left( \frac{\beta h \sqrt{gh}}{\bar{u}} \right).$$

▷ En écoulement uniforme  $\mathbf{u} = (u(z), 0)$ , l'équilibre des forces  $-\text{div } \sigma = \rho\phi\mathbf{g}$  donne

$$\partial_z \sigma_{xz} = -g \sin \theta \rho \phi, \quad \partial_z \sigma_{zz} = g \cos \theta \rho \phi,$$

donc avec condition sans tension à la surface libre  $\sigma_{xz} = \sigma_{zz} = 0$ , on trouve

$$\sigma_{xz} = \rho\phi g \sin \theta (h - z), \quad \sigma_{zz} = -\rho\phi g \cos \theta (h - z).$$

On en déduit que le coefficient de friction effectif  $\mu \equiv \frac{\sigma_{xz}}{-\sigma_{zz}}$  vaut

$$\mu = \tan \theta = \tan \theta_{\text{stop}} \left( \frac{\beta h \sqrt{gh}}{\bar{u}} \right),$$

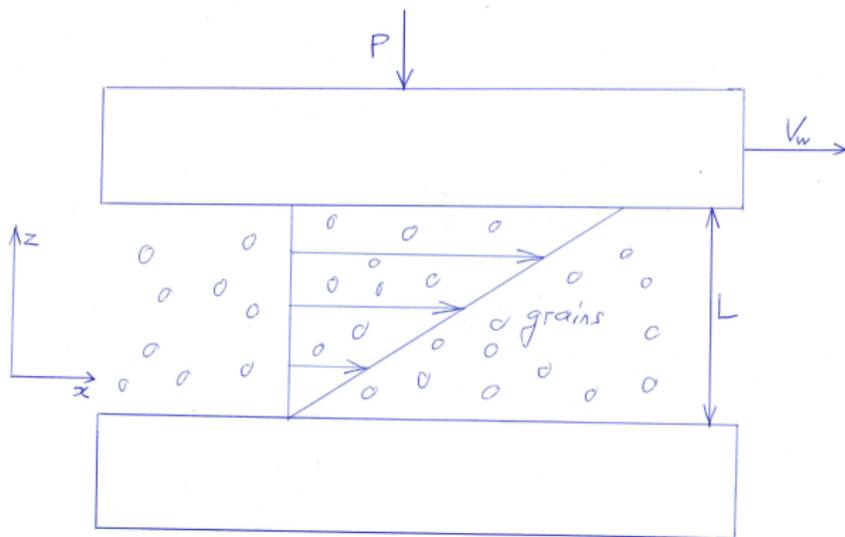
pour  $Fr \equiv \bar{u} / \sqrt{gh} \geq \beta$ . Ceci nous donne une expression de  $\mu$  en terms de  $h$  et  $\bar{u}$ . Mais on n'a pas d'expression pour  $\mu$  lorsque  $Fr < \beta$ .

▷ On peut retenir cette formule pour calculer un coefficient de friction effectif  $\mu$  en termes de la vitesse locale  $\bar{u}(t, x)$  et de la hauteur locale  $h(t, x)$  d'un écoulement de type shallow water.

▷ Comment encore généraliser à un écoulement non intégré sur la hauteur ?

Andreotti-Forterre-Pouliquen "Les milieux granulaires, entre fluide et solide", 2011, p.232.

On force un écoulement  $\mathbf{u} = (u(z), 0)$  avec  $u(z)$  linéaire en  $z$ .



Pression  $P$  imposée sur la plaque supérieure, qui est de plus entraînée à vitesse  $V_w$ . La plaque inférieure est fixe. Epaisseur fixée  $L$ . Le taux de cisaillement est constant

$$\frac{du}{dz} \equiv \dot{\gamma} = \frac{V_w}{L}.$$

Absence de gravité, donc les équations de l'équilibre donnent  $d\sigma_{xz}/dz = 0$ ,  $d\sigma_{zz}/dz = 0$ ,  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{zz}$  sont constants,  $\sigma_{zz} = -P$ , mais la valeur de la contrainte de cisaillement  $\sigma_{xz}$  reste à déterminer.

- ▷ On suppose les grains très rigides
- ▷ On suppose  $L/d \gg 1$ , où  $d$  est le diamètre des grains.
- ▷ Il reste 4 paramètres indépendants  $d$ ,  $\rho$ ,  $\dot{\gamma}$ ,  $P$ , qui impliquent uniquement 3 dimensions : longueur, masse, temps.
- ▷ On en déduit (théorème  $\Pi$ , Barenblatt 1996) que le système est contrôlé par un unique nombre sans dimension

$$I = \frac{\dot{\gamma}d}{\sqrt{P/\rho}}.$$

C'est le **nombre inertiel**.

- ▷ En particulier il existe des relations ne dépendant que du matériau

$$\frac{\sigma_{xz}}{-\sigma_{zz}} = \mu(I), \quad \phi = \phi(I).$$

▷ Interprétation :

$$I = \frac{t_{micro}}{t_{macro}}, \quad t_{micro} = \frac{d}{\sqrt{P/\rho}}, \quad t_{macro} = 1/\dot{\gamma}.$$

$t_{micro}$  est le temps caractéristique de réarrangement entre les grains.

$t_{macro}$  est le temps caractéristique de déformation macroscopique du matériau.

Le nombre  $I$  caractérise la dynamique du matériau granulaire :

$I < 10^{-3}$	$10^{-3} < I < 10^{-1}$	$10^{-1} < I$
solide/quasistatique	liquide	gaz

- ▷ Si on suppose que les relations rhéologiques

$$\frac{\sigma_{xz}}{-\sigma_{zz}} = \mu(I), \quad I = \frac{\dot{\gamma}d}{\sqrt{P/\rho}}$$

sont toujours vraies localement (c'est ce qu'on appelle **la rhéologie  $\mu(I)$** ) et qu'on les applique aux écoulements uniformes sous gravité, on a les valeurs moyennes  $\bar{P} = \rho\phi g \cos\theta h/2$ ,  $\bar{u} \simeq \dot{\gamma}h/2$ , on retrouve que  $\mu$  ne dépend que de  $\bar{u}d/h\sqrt{g\theta}$ .

- ▷ Si on applique cette rhéologie sur l'écoulement uniforme sous gravité sans intégrer en  $z$  on trouve  $\mu(I) = -\sigma_{xz}/\sigma_{zz} = \tan\theta$  donc

$$I = \mu^{-1}(\tan\theta)$$

est indépendant de  $z$ . Avec la relation  $-\sigma_{zz} = P = \rho\phi g \cos\theta(h-z)$  et  $\dot{\gamma} = du/dz$  on trouve

$$\frac{du}{dz} = \frac{I}{d} \sqrt{\phi g \cos\theta(h-z)},$$

$$\frac{u(z)}{\sqrt{gd}} = \frac{2}{3} I \sqrt{\phi \cos\theta} \frac{h^{3/2} - (h-z)^{3/2}}{d^{3/2}}.$$

C'est le **profil de Bagnold**.

- ▷ Une forme reconnue pour  $\mu$  est

$$\mu(I) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{1 + I_0/I},$$

avec  $0 < \mu_s < \mu_2$ , et  $I_0 \sim 0.3$ . Donc  $\mu(I)$  varie entre deux valeurs  $\mu_s$  et  $\mu_2$ . Pour inverser la relation et trouver  $I = \mu^{-1}(\tan \theta)$  il faut donc

$$\mu_s < \tan \theta < \mu_2.$$

C'est la condition pour laquelle le modèle analytique avec la rhéologie locale admet des écoulements stationnaires uniformes.

- ▷ Cette théorie donne donc  $\theta_{stop}(h) = \mu_s$  indépendant de  $h$ , ce qui ne correspond pas aux expériences !

## II. Modèles viscoplastiques incompressibles et leur résolution numérique

- ▷ On part d'une modélisation dynamique classique

$$\rho\phi(\partial_t u + u \cdot \nabla u) - \operatorname{div} \sigma = \phi f,$$

avec  $\sigma$  le tenseur des contraintes (matrice symétrique). On peut décomposer

$$\sigma = -p \operatorname{Id} + \sigma', \quad \operatorname{tr} \sigma' = 0,$$

avec  $p$  la pression (effective), et  $\sigma'$  le déviateur des contraintes, noté parfois  $\tau$ .

- ▷ Pour un modèle incompressible on a

$$\operatorname{div} u = 0, \quad \phi = \text{cste},$$

et  $\sigma'$  est à définir.  $p$  est un multiplicateur de Lagrange pour la contrainte  $\operatorname{div} u = 0$ .

- ▷ Pour un modèle compressible on a

$$\partial_t \phi + \operatorname{div}(\phi u) = 0,$$

et  $\sigma$  (ou de façon équivalente  $p$  et  $\sigma'$ ) est à définir.

- ▷ Un modèle newtonien incompressible est

$$\sigma' = 2\eta Du,$$

avec  $Du = (\nabla u + (\nabla u)^t)/2$  le taux de déformation, et  $\eta = \eta(\phi)$  la viscosité.

- ▷ Un modèle newtonien compressible est

$$\sigma = -p_0(\phi) \operatorname{Id} + 2\eta Du + \lambda \operatorname{Id} \operatorname{div} u,$$

où  $p_0(\phi)$  est la pression thermodynamique,  $\eta(\phi)$  et  $\lambda(\phi)$  les coefficients de viscosité.

- ▷ Un modèle **viscoplastique** est défini par une rhéologie de la forme

$$\sigma \text{ fonction de } \phi, Du \text{ (compressible),}$$

$$\sigma' \text{ fonction de } \phi, Du, \text{ éventuellement } p, \text{ (incompressible).}$$

- ▷ Dans les écoulements de laboratoire présentés on a  $\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div}(u(z), 0) = 0$ . Cela amène naturellement à une modélisation dynamique incompressible.
- ▷ On considère maintenant le **modèle incompressible défini par la rhéologie  $\mu(I)$  locale** :

$$\sigma' = \mu(I)p \frac{Du}{|Du|},$$

avec  $|Du|^2 = (\sum_{ij} Du_{ij}^2)^{1/2}$  et

$$I = \frac{2d|Du|}{\sqrt{\rho/\rho}}.$$

C'est la généralisation tensorielle du modèle à cisaillement simple puisque  $|\sigma'| = \mu(I)p$ .

- ▷ La rhéologie  $\mu(I)$  donnée par  $\sigma' = \mu(I)\rho \frac{Du}{|Du|}$  peut aussi s'écrire sous forme de "viscosité effective"

$$\sigma' = 2\eta_{\text{effectif}} Du, \quad \eta_{\text{effectif}} = \frac{\mu(I)\rho}{2|Du|}.$$

$\eta_{\text{effectif}}$  dépend alors de  $|Du|$  et  $p$ .

- ▷ Une autre écriture est

$$\sigma' = 2\eta Du + \mu_s \rho \frac{Du}{|Du|}, \quad \eta = \frac{(\mu(I) - \mu_s)\rho}{2|Du|},$$

avec  $\mu_s = \mu(0)$ . Sous cette forme,  $\eta$  n'a pas de singularité quand  $Du \rightarrow 0$ .  $\eta$  représente donc une certaine forme intuitive de viscosité, tandis que le terme  $\mu_s \rho Du / |Du|$  a une homogénéité qui permet de le considérer comme partie plastique pure.

- ▷ Relevance de la rhéologie  $\mu(I)$  : cf cours de Anne Mangeney.

- ▶ Le gros problème de la rhéologie incompressible  $\sigma' = 2\eta Du$  où  $\eta$  dépend de  $p$  est qu'elle est en général **mal posée** !
- ▶ Pour la rhéologie  $\mu(I)$  incompressible, **Barker et al. 2015** ont montré si on prend une solution de référence régulière et qu'on fait une perturbation locale à nombre d'onde très grand, **le problème linéarisé est mal posé** (de type chaleur rétrograde), ceci pour une large plage de valeurs de  $I$  (pour  $I$  petit et pour  $I$  grand).
- ▶ En pratique, numériquement on fait un point fixe, à chacune des étapes on considère que  $p = p(x)$  est donné. Lorsque le maillage n'est pas trop fin on a un bon comportement sans instabilité.
- ▶ Mais lorsqu'on raffine, on voit apparaître des **"bandes de cisaillement"**, qui deviennent d'autant plus fines que le maillage est fin (**Martin & al. 2017**).
- ▶ La rhéologie  $\mu(I)$  a les bonnes échelles physiques, mais pas la bonne structure algébrique-différentielle.

- ▷ On va considérer maintenant le problème modèle

$$\alpha u - \operatorname{div} \sigma' + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0,$$

avec  $\alpha > 0$  et une rhéologie

$$\sigma' \in \partial F(Du),$$

où la non-linéarité est

$$F : \mathbb{M}_{N \times N}^{s0}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \text{ convexe sci non identiquement } \infty.$$

- ▷ De façon explicite,  $F$  est définie sur l'espace des matrices symétriques  $N \times N$  de trace nulle. Le **sous-différentiel** est défini par

$$\partial F(D') = \{ \sigma' \text{ tels que } \forall A \ F(A) \geq F(D') + \sigma' : (A - D') \}.$$

Ici, “:” représente le produit scalaire des matrices.

## ▷ Exemple : Bingham

$$F(D') = \kappa |D'|.$$

On a alors

$$\partial F(D') = \begin{cases} \kappa \frac{D'}{|D'|} & \text{si } D' \neq 0, \\ \bar{B}_{M^s0}(0, \kappa) & \text{si } D' = 0. \end{cases}$$

$\kappa$  est le seuil de contraintes. Lorsqu'on a la relation  $\sigma' \in \partial F(Du)$ ,

- $|\sigma'| \leq \kappa \rightarrow Du$  peut être nul,
- $|\sigma'| > \kappa \rightarrow Du$  doit être non nul.

Le fluide peut être à l'arrêt (ou plus généralement avoir  $Du = 0$  ie un mouvement solide) avec des contraintes  $\sigma'$  non nulles (c'est le cas pour les écoulements uniformes si  $\theta < \theta_{min}$ ). **C'est un fluide à seuil.**

**Lemme (classique)** Si  $u(x) \in \mathbb{R}^N$  vérifie  $Du(x) = 0$  pour  $x \in \Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , alors il existe  $v \in \mathbb{R}^N$  et  $A$  application linéaire antisymétrique ( $A^t = -A$ ) tels que

$$u(x) = v + Ax, \quad \text{pour } x \in \Omega.$$

Autrement dit,  $u$  est le champ de vitesse d'un mouvement solide. En 3d,  $Ax = \Omega \wedge x$ . Quitte à changer l'origine on peut prendre  $v$  colinéaire à  $\Omega$ . L'opérateur  $A$  correspond à un mouvement de rotation (autour de l'axe donné par  $\Omega$ ), le vecteur  $v$  correspond à un mouvement de translation. Analytiquement  $X(t, x) = \exp(At)x + vt$  donne  $dX/dt = A \exp(At)x + v = A(\exp(At)x + vt) + v = AX(t, x) + v$ .

▷ Exemple : Herschel-Bulkley

$$F(D') = \frac{\kappa}{1+n} |D'|^{1+n} + \kappa |D'|.$$

▷  $F$  n'est pas différentiable à l'origine, cela permet au matériau de pouvoir se comporter comme un solide (contraintes sous le seuil) ou comme un liquide/gaz (contraintes au dessus du seuil).

▷ Condition de dissipation

$$\partial F(0) \ni 0.$$

Propriété de monotonie du sous-différentiel des fonctions convexes :

$$\sigma_1 \in \partial F(D_1), \sigma_2 \in \partial F(D_2) \Rightarrow (\sigma_2 - \sigma_1) : (D_2 - D_1) \geq 0.$$

En particulier la propriété  $\partial F(0) \ni 0$  donne

$$\sigma \in \partial F(Du) \implies \sigma : Du \geq 0.$$

Multipliant l'équation  $\alpha u - \operatorname{div} \sigma + \nabla p = f$  par  $u$  et intégrant on trouve

$$\int \alpha |u|^2 = \int f \cdot u - \int \sigma : Du,$$

et  $\int \sigma : Du$  est la dissipation d'énergie.

Soit  $H = \{u \in L^2(\Omega) \mid \operatorname{div} u = 0\}$  avec  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  (Si on ne met pas la contrainte  $\operatorname{div} u = 0$  on obtient le problème compressible).

▷ Formulation variationnelle :

$$u \in H, \quad \forall v \in H \quad \int \alpha u \cdot (v - u) + \int F(Dv) - \int F(Du) \geq \int f \cdot (v - u),$$

où  $\int F(Dv)$  est défini par dualité :

$$\int F(Dv) = \sup_{w \in V} \langle v, w \rangle,$$

avec

$$V = \left\{ w \in L^2(\Omega)^N, \exists \varphi \in (C_c^1(\Omega))^{N^2}, w_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \partial_j (\varphi_{ij} + \varphi_{ji}), \int_{\Omega} F^*(\varphi) \leq 1 \right\},$$

et  $F^*$  est la fonction convexe conjuguée de  $F$ ,

$$F^*(\sigma) = \sup_A (\sigma : A - F(A)).$$

▷ Des formulations vitesse-pression dans des espaces non à divergence nulle sont possibles.

La théorie classique des problèmes monotones (**Brézis, Duvaut-Lions, Glowinski-Lions-Trémolières, Temam**) établit facilement le résultat suivant.

Théorème (**existence et unicité**).

▷ Le problème variationnel est équivalent à

$$\inf_{u \in H} \int \alpha \frac{|u|^2}{2} + \int F(Du) - \int f \cdot u.$$

▷ Quel que soit  $f \in L^2(\Omega)$  il y a une unique solution  $u \in H$ .

Théorème (**Glowinski**) (**équivalence avec la forme EDP**) Le problème de minimisation est équivalent à la formulation faible

$$\begin{aligned} \alpha u - \operatorname{div} \sigma' + \nabla p &= f, & \operatorname{div} u &= 0, \\ \sigma' &\in \partial F(Du), \end{aligned}$$

▷  $u$  est unique mais  $\sigma$  n'est pas unique !

Théorème (**Brézis 1971**) (**régularité, pour conditions aux limites de Dirichlet homogène**) pour  $F(D) = \eta |D|^2/2 + \kappa |D|$

▷ Si  $\eta > 0$  alors  $u \in H^2(\Omega)$

▷ Si  $\eta = 0$  et  $f \in H^1(\Omega)$  alors  $u \in H^1(\Omega)$ .

Même avec des données très régulières on n'a en général pas mieux.

**Formulation duale.** On considère maintenant le cas sans contrainte de divergence nulle pour simplifier, i.e. le cas compressible (ça ne change pas beaucoup). Le problème s'écrit formellement

$$\alpha u - \operatorname{div} F'(Du) = f,$$

ou de façon plus rigoureuse

$$\alpha u - \operatorname{div} \sigma = f, \quad \sigma \in \partial F(Du).$$

Soit  $F^*$  la fonction convexe conjuguée de  $F$  ie  $F^*(\sigma) = \sup_A (\sigma : A - F(A))$ . Alors  $\partial F^*$  est l'inverse généralisé de  $\partial F$ , donc

$$\sigma \in \partial F(Du) \Leftrightarrow Du \in \partial F^*(\sigma).$$

On peut donc écrire le problème sous la forme duale

$$f + \operatorname{div} \sigma = \alpha u, \quad \partial F^*(\sigma) \ni Du = D \left( \frac{f + \operatorname{div} \sigma}{\alpha} \right).$$

Ce problème peut donc se résoudre par minimisation

$$\inf_{\sigma} \int F^*(\sigma) + \frac{1}{2\alpha} \int |f + \operatorname{div} \sigma|^2,$$

et rappelons la formulation directe

$$\inf_u \int \alpha \frac{|u|^2}{2} + \int F(Du) - \int f \cdot u.$$

Formulation par point selle. On définit maintenant le Lagrangien

$$\mathcal{L}(\sigma, u) = \int \left( \alpha \frac{|u|^2}{2} + \sigma : Du - f \cdot u - F^*(\sigma) \right).$$

On a alors

$$\sup_{\sigma} \mathcal{L}(\sigma, u) = \int \alpha \frac{|u|^2}{2} + \int F(Du) - \int f \cdot u,$$

et

$$\inf_u \mathcal{L}(\sigma, u) = - \int F^*(\sigma) - \frac{1}{2\alpha} \int |f + \operatorname{div} \sigma|^2.$$

Le problème s'écrit donc de deux façons

$$\inf_u \sup_{\sigma} \mathcal{L}(\sigma, u) = \sup_{\sigma} \inf_u \mathcal{L}(\sigma, u).$$

Ecrivant  $F^*(\sigma) = \sup_{\gamma} (\sigma : \gamma - F(\gamma))$  cela peut aussi s'écrire

$$\sup_{\sigma} \inf_{u, \gamma} \bar{\mathcal{L}}(\sigma, u, \gamma),$$

avec

$$\bar{\mathcal{L}}(\sigma, u, \gamma) = \int \left( \alpha \frac{|u|^2}{2} + \sigma : (Du - \gamma) + F(\gamma) - f \cdot u \right).$$

Lagrangien augmenté appelé aussi "Alternate directions method of multipliers" (ADMM)

$$\bar{\mathcal{L}}^{aug}(\sigma, u, \gamma) = \bar{\mathcal{L}}(\sigma, u, \gamma) + \frac{r}{2} \int |Du - \gamma|^2.$$

Le terme additionnel ne change pas la condition de minimalité ni la valeur au minimum. Le problème est donc

$$\sup_{\sigma} \inf_{u, \gamma} \bar{\mathcal{L}}^{aug}(\sigma, u, \gamma).$$

▷ Le terme d'"augmentation" améliore la stabilité des algorithmes de descente. La méthode du lagrangien augmenté proposée par Fortin-Glowinski 1983, Saramito-Roquet 2001 s'écrit :

▷  $\sigma_0, \gamma_0$  donnés,

▷  $k \geq 0$ ,  $\sigma_k$  et  $\gamma_k$  étant connus, calculer  $u_k$  par  $\inf_u \bar{\mathcal{L}}^{aug}$ , ie

$$\alpha u_k - \operatorname{div} \sigma_k - \operatorname{div} r(Du_k - \gamma_k) = f,$$

▷ Calculer  $\gamma_{k+1}$  par  $\inf_{\gamma} \bar{\mathcal{L}}^{aug}$ , ie

$$\partial F(\gamma_{k+1}) \ni \sigma_k - r(\gamma_{k+1} - Du_k),$$

calculer  $\sigma_{k+1}$  en allant dans la direction du gradient de  $\bar{\mathcal{L}}^{aug}$ , ie

$$\sigma_{k+1} = \sigma_k + r \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}^{aug}}{\partial \sigma}(\sigma_k, u_k, \gamma_{k+1}) = \sigma_k + r(Du_k - \gamma_{k+1}).$$

- ▷ La première étape (pour trouver  $u_k$ ) est un problème elliptique, résolu par éléments finis.
- ▷ Les deux autres étapes (pour trouver  $\gamma_{k+1}$  et  $\sigma_{k+1}$ ) sont des opérations non-linéaires mais locales.
- ▷ On peut reformuler ces deux opérations via un **opérateur proximal** (appelé aussi résolvante). On définit

$$\mathbb{P}_r(\sigma) = (\text{Id} + r\partial F^*)^{-1}(\sigma) = \sigma - r(\text{Id} + \partial F/r)^{-1}(\sigma/r),$$

la dernière égalité est appelée **l'identité de Moreau**. Ces opérateurs sont bien définis partout et univalués. Alors on trouve  $\gamma_{k+1}$  et  $\sigma_{k+1}$  par

$$\gamma_{k+1} = (\text{Id} + \partial F/r)^{-1} \left( \frac{\sigma_k + rDu_k}{r} \right), \quad \sigma_{k+1} = \mathbb{P}_r(\sigma_k + rDu_k).$$

- ▷ La convergence de la méthode est démontrée, l'erreur est en  $1/k$  ( $k$  nombre d'itérations) si on fait abstraction de l'erreur induite par la discrétisation en espace.
- ▷ Cette méthode introduite dans les années 70 a été et est toujours très utilisée. Cf travaux récents de **Saramito, Ionescu, Fernandez-Nieto, Vigneaux**.

**La méthode de régularisation.** Considérons le modèle de Bingham sans viscosité  $F(D) = \kappa|D|$ . Le problème est donc

$$\inf_u \int \left( \alpha \frac{|u|^2}{2} + \kappa |Du| - f \cdot u \right).$$

On approche ce problème non différentiable par un problème différentiable

$$\inf_u \int \left( \alpha \frac{|u|^2}{2} + \kappa (\sqrt{|Du|^2 + \epsilon^2} - \epsilon) - f \cdot u \right),$$

ce qui revient à résoudre

$$\alpha u - \operatorname{div} \frac{\kappa Du}{\sqrt{|Du|^2 + \epsilon^2}} = f.$$

On peut montrer qu'on commet une erreur  $\|u_{\text{ex}} - u_\epsilon\| \simeq \sqrt{\epsilon}$ .

▷ On résout le problème non-linéaire par itération

$$\alpha u_{k+1} - \operatorname{div} \frac{\kappa Du_{k+1}}{\sqrt{|Du_k|^2 + \epsilon^2}} = f.$$

Ce problème étant différentiable, cela permet une convergence géométrique en  $r^k$ , avec

$$r = \frac{\|Du\|_{L^\infty}}{\|Du\|_{L^\infty} + \epsilon} < 1.$$

Bouchut, Eymard, Prignet 2014

- ▷ On peut estimer simplement l'erreur  $E$  commise par la méthode de régularisation, pour les solutions régulières ( $H^2$ )

$$E \simeq \frac{r^k}{1-r} + \epsilon,$$

avec  $r \simeq 1 - \epsilon$ . L'optimal est d'équilibrer les deux termes d'erreur, donc de prendre

$$\epsilon \simeq \frac{r^k}{1-r} \simeq E.$$

On trouve alors

$$k = \frac{\ln(1-r)E}{\ln r} \simeq \frac{\ln \epsilon E}{\ln(1-\epsilon)} \simeq \frac{\ln E^2}{-E}.$$

On en déduit à un logarithme près

$$E \simeq \frac{1}{k}.$$

- ▷ Par contre pour des solutions moins régulières ( $H^1$ ), l'erreur de régularisation est en  $\sqrt{\epsilon}$ , et on trouve  $E \simeq 1/\sqrt{k}$ .
- ▷ Lorsqu'on superpose une méthode de discrétisation en espace (éléments finis), on a une erreur supplémentaire en  $h^2$  ( $h$  taille de la maille). Pour optimiser les paramètres il est normal d'équilibrer les erreurs ce qui donne  $\epsilon \sim h^2$  (ou  $\epsilon \sim h^4$  pour les solutions peu régulières).
- ▷ L'approximation en norme ne garantit pas le bon placement de la "yield surface", interface entre les parties fluide ( $Du \neq 0$ ) et solide ( $Du = 0$ ), qui peut ne pas être très bonne pour la méthode de régularisation.

▷ Algorithmes primaux-duaux Un très bon article de revue : "An introduction to continuous optimization for imaging", Chambolle-Pock, 2016. Un problème modèle est

$$\inf_x f(Kx) + g(x),$$

avec  $f, g$  convexes,  $K$  linéaire. (pour nous  $x = u$ ,  $Ku = Du$ ,  $f(A) = \int F(A(x))dx$ ,  $g(u) = \int \alpha|u|^2/2 - f \cdot u$ ). Cela s'écrit comme un problème de point selle

$$\sup_y \inf_x \langle y, Kx \rangle - f^*(y) + g(x)$$

(pour nous  $y = \sigma$ ).

▷ Algorithme proximal de Chambolle-Pock 2011.  $\tau, r > 0$ ,  $\theta \in [0, 1]$ ,  $x^0, y^0$  donnés,  $\bar{x}^0 = x^0$ ,

$$\begin{aligned} y^{k+1} &= (\text{Id} + r\partial f^*)^{-1}(y^k + rK\bar{x}^k), \\ x^{k+1} &= (\text{Id} + \tau\partial g)^{-1}(x^k - \tau K^* y^{k+1}), \\ \bar{x}^{k+1} &= x^{k+1} + \theta(x^{k+1} - x^k). \end{aligned}$$

Condition de stabilité

$$r\tau\|K\|^2 \leq 1.$$

- ▷ L'algorithme de Chambolle-Pock est prouvé converger avec erreur en  $1/k$  pour  $f, g$  généraux. Lorsque  $g^*$  ou  $f$  a un gradient lipschitzien (ce qui est notre cas pour  $g^*$ ), un **procédé d'accélération** qui consiste à définir des paramètres dépendent de  $k$   $\tau_k, r_k, \theta_k$ , donne une **convergence en  $1/k^2$** .
- ▷ Cet algorithme est a priori meilleur que le lagrangien augmenté ou la régularisation, mais apparemment personne ne l'a testé sur les problèmes viscoplastiques (testé uniquement sur les problèmes d'image avec  $u$  scalaire,  $Ku = \nabla u$ ), **problème potentiel de la surface de seuil**.
- ▷ Cet algorithme ne nécessite que des opérations simples (pas de problème elliptique à résoudre). Par exemple pour  $\theta = 1$  il s'écrit pour notre problème

$$\sigma_{k+1} = \mathbb{P}_r(\sigma_k + r(2Du_k - Du_{k-1})), \quad \frac{u_{k+1} - u_k}{\tau} + \alpha u_{k+1} - \operatorname{div} \sigma_{k+1} = f.$$

- ▷ La condition de stabilité pourrait devenir pénalisante car comme  $Ku = Du$  est non borné, après discrétisation en espace elle devient  $r\tau \simeq h^2$ . Lorsque  $h$  est petit le coût risque d'être élevé. Une possibilité est de remplacer  $\operatorname{Id}$  par  $-\Delta$  dans la résolvante associée à  $\tau$ . La condition de stabilité devient alors  $r\tau \leq 1$ , mais on a un problème elliptique à résoudre à chaque itération.
- ▷ La méthode ressemble à celle de **Dean & al 2007, Chupin-Dubois 2015** "régularisation en temps" où

$$\sigma_{k+1} = \mathbb{P}_r(\sigma_{k+1} + rDu_k + \theta(\sigma_k - \sigma_{k+1})).$$

Pour la mise en oeuvre pratique de la simulation de problèmes d'écoulement de colonne granulaire, il faut gérer :

- ▷ la discrétisation en espace par **éléments finis** (typiquement  $P^2$  en vitesse,  $P^1$  en pression),
- ▷ le déplacement de la frontière soit par suivi d'interface, soit par déplacement de maillage (**méthode ALE** arbitrary lagrangian eulerian),
- ▷ les conditions aux limites (**friction de Coulomb** au fond...),
- ▷ le **traitement correct du front** avec le dépôt de grains de la surface libre sur le fond, ou l'interface avec un lit érodable,
- ▷ la gestion du pas de temps : plus petit lorsque la surface de seuil est inconnue (démarrage d'un écoulement), plus grand lorsqu'on a seulement à déterminer son déplacement,
- ▷ la gestion des critères d'arrêt d'itération et le **choix de  $\epsilon$**  pour la méthode de régularisation, typiquement

$$\epsilon = 10^{-2}(\Delta X^2 |Du|^2 \rho/p)/T.$$

On ne tient pas compte de la viscosité dans ce calcul de  $\epsilon$  car pour les écoulements granulaires la contrainte visqueuse est nettement plus petite que la contrainte purement plastique.

Lusso, Ern, Bouchut, Mangeney, Farin, Roche, JCP 2017.

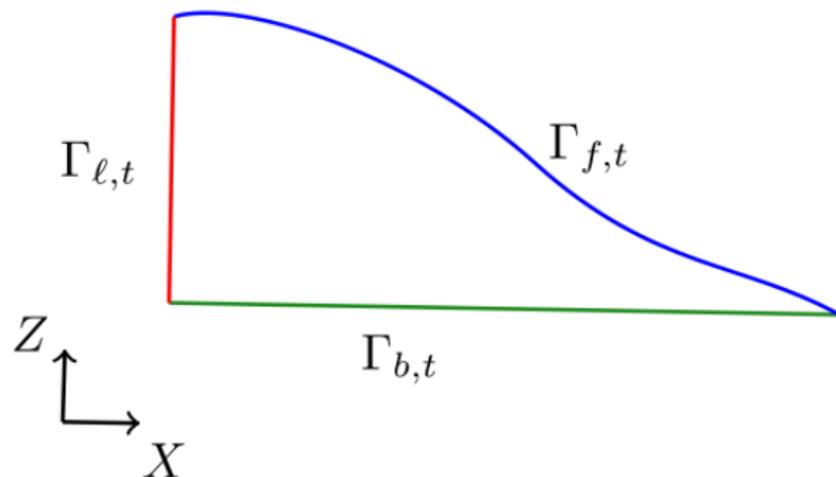
Description plus explicite de la méthode

▷ On considère une rhéologie incompressible de type **Drucker-Prager** (viscosité constante)

$$\sigma = \sigma' - p \text{Id}, \quad \text{avec } \sigma' = 2\eta Du + \kappa \frac{Du}{|Du|},$$

$$\kappa = \sqrt{2}\mu_s [p]_+.$$

Pour simuler un effondrement granulaire on considère un domaine avec un fond  $\Gamma_{b,t}$ , une surface libre  $\Gamma_{f,t}$ , et un bord latéral  $\Gamma_{l,t}$ .



Les conditions aux limites sont

▷ Sur le fond et le bord latéral  $\Gamma_{b,t} \cup \Gamma_{\ell,t}$

$$u \cdot \mathbf{N} = 0,$$

avec une condition de **friction de Coulomb**

$$\begin{aligned} \sigma'_T &= -\mu_{b/\ell} \frac{u_T}{|u_T|} [p - \sigma'_N]_+ & \text{si } u_T \neq 0, \\ |\sigma'_T| &\leq \mu_{b/\ell} [p - \sigma'_N]_+ & \text{si } u_T = 0. \end{aligned}$$

où  $\mu_{b/\ell} = \mu_b$  sur le fond  $\mu_{b/\ell} = \mu_\ell$  sur le bord, et où la décomposition normale/tangentielle de  $u$  et  $\sigma' \mathbf{N}$  sont

$$\begin{aligned} u &= u_N \mathbf{N} + u_T & \text{avec } u_N &= u \cdot \mathbf{N}, \\ \sigma' \mathbf{N} &= \sigma'_N \mathbf{N} + \sigma'_T & \text{avec } \sigma'_N &= (\sigma' \mathbf{N}) \cdot \mathbf{N}. \end{aligned}$$

La condition de non glissement implique en fait  $u_N = 0$  au fond et sur le bord latéral.

▷ A la surface libre  $\Gamma_{f,t}$  on a la condition de **tension**

$$\sigma(t, \vec{X}) \mathbf{N} = \gamma \mathbf{N},$$

où  $\gamma$  est prise non nul uniquement pour des raisons numériques dans le cas de configuration sur fond érodable. On a la **condition cinématique**

$$N_t + \mathbf{N} \cdot u = 0,$$

où  $(N_t, \mathbf{N})$  est la normale temps-espace à la surface libre.

- ▷ On utilise une formulation variationnelle avec les espaces vitesse-pression

$$V_t = \left\{ v \in H^1(\Omega_t)^2 \text{ tel que } v \cdot \mathbf{N} = 0 \text{ sur } \Gamma_{b,t} \cup \Gamma_{\ell,t} \right\},$$

$$M_t = L^2(\Omega_t).$$

- ▷ Formulation variationnelle avec la méthode de régularisation : trouver  $(u, p)$  tel que  $u(t) \in V_t$ ,  $p(t) \in M_t$ , et pour presque tout  $t$  et tous  $(v, q) \in V_t \times M_t$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \rho (\partial_t u + (u \cdot \nabla) u) \cdot v + \int_{\Omega_t} 2\eta Du : Dv + \int_{\Omega_t} \kappa \frac{Du}{\sqrt{|Du|^2 + \epsilon^2}} : Dv - \int_{\Omega_t} p \operatorname{div} v \\ & + \int_{\Gamma_{b,t} \cup \Gamma_{\ell,t}} \mu_{b/\ell} \frac{u_T \cdot v}{\sqrt{|u_T|^2 + \epsilon_f^2}} [p - \sigma'_N]_+ = \int_{\Omega_t} \rho f \cdot v + \int_{\Gamma_{f,t}} \gamma v \cdot \mathbf{N}, \\ & \int_{\Omega_t} q \operatorname{div} u = 0. \end{aligned}$$

- ▷ Méthode **ALE** de déplacement du domaine et du maillage :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n,n+1} : \quad \Omega_h^n &\rightarrow \Omega_h^{n+1} \\ \vec{X} &\mapsto \vec{Y} = \vec{X} + \Delta t_n w_h^n(\vec{X}), \end{aligned}$$

où  $w_h^n$  est la vitesse de déplacement du maillage.

▷ On obtient la formulation itérative suivante pour des espaces de dimension finie  $V_h^n$ ,  $M_h^n$  : Etant donnés  $(u_h^{n+1,k}, p_h^{n+1,k})$ , trouver  $(u_h^{n+1,k+1}, p_h^{n+1,k+1}) \in V_h^{n+1} \times M_h^{n+1}$  tels que pour tous  $(v_h, q_h) \in V_h^{n+1} \times M_h^{n+1}$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_h^{n+1}} \rho \left( \frac{u_h^{n+1,k+1} - u_h^n \circ \mathcal{A}_{n,n+1}^{-1}}{\Delta t_n} + \left[ (u_h^{n+1,k} - w_h^n \circ \mathcal{A}_{n,n+1}^{-1}) \cdot \nabla \right] u_h^{n+1,k+1} \right) \cdot v_h \\ & + \int_{\Omega_h^{n+1}} \left( 2\eta + \frac{\kappa_h^{n+1,k}}{\sqrt{\|Du_h^{n+1,k}\|^2 + \epsilon^2}} \right) Du_h^{n+1,k+1} : Dv_h \\ & - \int_{\Omega_h^{n+1}} p_h^{n+1,k+1} \operatorname{div} v_h + \int_{\Gamma_{b,h}^{n+1} \cup \Gamma_{\ell,h}^{n+1}} \mu_{b/\ell} \frac{u_{T,h}^{n+1,k+1} \cdot v_h}{\sqrt{|u_{T,h}^{n+1,k}|^2 + \epsilon_f^2}} [p_h^{n+1,k} - \sigma'_{N,h}{}^{n+1,k}]_+ \\ & + \int_{\Gamma_{b,h}^{n+1} \cup \Gamma_{\ell,h}^{n+1}} \xi (u_h^{n+1,k+1} \cdot \mathbf{N})(v_h \cdot \mathbf{N}) = \int_{\Omega_h^{n+1}} \rho f^{n+1} \cdot v_h + \int_{\Gamma_{f,h}^{n+1}} \gamma v_h \cdot \mathbf{N}, \\ & \int_{\Omega_h^{n+1}} q_h \operatorname{div} u_h^{n+1,k+1} = 0, \end{aligned}$$

où  $\kappa_h^{n+1,k} = \sqrt{2}\mu_s [p_h^{n+1,k}]_+$ , et  $\xi \gg 1$  est un paramètre de pénalisation ( $\xi = 10^{12}$ ).

La condition  $u \cdot \mathbf{N} = 0$  est formulée au sens faible.

▷ La vitesse du maillage  $w_h^n$  doit vérifier

$$w_h^n \cdot \mathbf{N} = u_h^n \cdot \mathbf{N} \text{ sur } \Gamma_{f,h}^n,$$

pour la **constance avec la condition cinématique**, ainsi que

$$w_h^n \cdot \mathbf{N} = 0 \text{ sur } \Gamma_{b,h}^n \cup \Gamma_{\ell,h}^n$$

pour **consistance avec un fond et bord immobiles**. Pour avoir la meilleure régularité possible,  $w_h^n$  est obtenue par la résolution d'un problème aux limites

$$-\operatorname{div}(Dw_h^n) = 0 \quad \text{dans } \Omega_h^n,$$

en complétant les conditions aux limites ci-dessus par

$$(Dw_h^n \mathbf{N})_T = 0 \quad \text{sur } \Gamma_h^n,$$

ceci pour **laisser la composante tangentielle de  $w_h^n$  s'ajuster librement de façon à avoir la meilleure régularité possible**. Formulation au sens faible : trouver

$(w_h^n, \tilde{p}_h^n) \in \mathbb{P}_2(\Omega_h^n)^2 \times \mathbb{P}_2(\Omega_h^n)$  tels que pour tous  $(v_h, q_h) \in \mathbb{P}_2(\Omega_h^n)^2 \times \mathbb{P}_2(\Omega_h^n)$ ,

$$\int_{\Omega_h^n} Dw_h^n : Dv_h + \xi^{-1} \int_{\Omega_h^n} \tilde{p}_h^n q_h + \int_{\Gamma_h^n} q_h (w_h^n - u_h^n) \cdot \mathbf{N} + \int_{\Gamma_h^n} \tilde{p}_h^n (v_h \cdot \mathbf{N}) = 0.$$

Traitement du front :



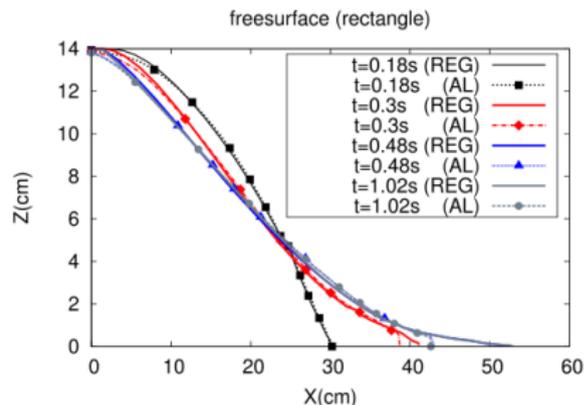
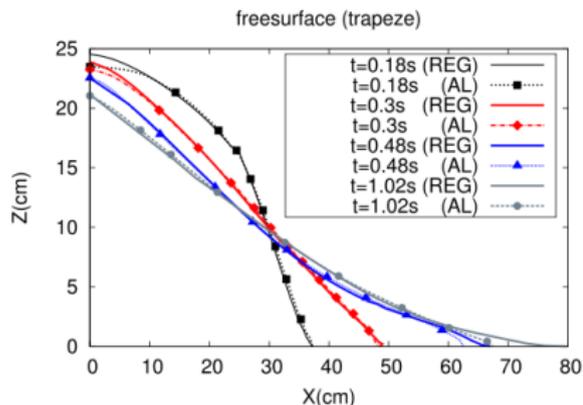
▷ On doit limiter le pas de temps pour que la surface libre ne traverse pas le fond.

(Gauche) bord au temps  $t^n$ . Les flèches représentent le déplacement  $\Delta tw_h^n$  qui devrait être appliqué.

(Droite) Nouvelle position du bord au temps  $t^{n+1}$ . Le pas de temps a été diminué pour qu'aucun noeud du bord ne traverse le fond. Du coup une partie de la surface libre s'est transformée en "fond".

Cette dynamique correspond à une dynamique physique de "chenillage" du matériau sur le fond.

Comparaison de surface libre par la méthode de régularisation (REG) et par la méthode du lagrangien augmenté (AL).

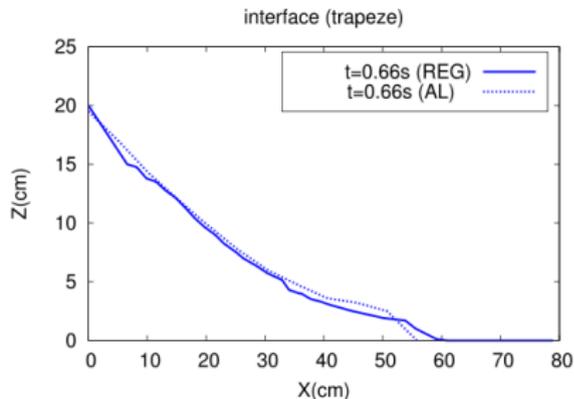
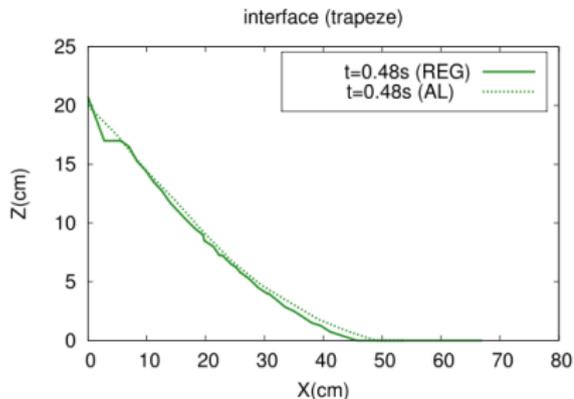


- ▷ Les résultats sont similaires. Le même maillage initial et les mêmes pas de temps ont été utilisés.
- ▷ La régularisation prend un temps de calcul 5 fois plus court que le lagrangien augmenté.

- ▷ Détermination de la zone solide pour la méthode de régularisation. La zone d'écoulement est définie par l'ensemble des mailles où

$$|u| > \epsilon_{stop},$$

où  $\epsilon_{stop}$  est pris comme environ 10% de la variation de  $u$  sur une cellule (de la zone d'écoulement). Les cellules non en écoulement (selon ce critère) sont déclarées solides.



- ▷ Les deux méthodes donnent des résultats similaires.
- ▷ Le facteur  $p$  dans la loi rhéologique est fondamental pour avoir la zone solide en bas. Pour un modèle de type Herschel-Bulkley la zone solide est en haut !

### **III. Nécessité de modèles viscoplastiques compressibles pour les matériaux granulaires**

- ▷ **Barker & al. 2017, Heyman & al. 2017** : un modèle " $\mu(I)$  compressible" peut être **bien posé linéairement**, contrairement au cas incompressible.
- ▷ **Bouchut & al. 2016** : pour avoir les effets de **dilatance** il faut un modèle compressible.
- ▷ Essai de modélisation compressible (**pas d'élasticité**)

$$\begin{aligned}\partial_t \phi + \operatorname{div}(\phi u) &= 0, \\ \rho \phi (\partial_t u + u \cdot \nabla u) &= \operatorname{div} \sigma + \phi f,\end{aligned}$$

avec  $\phi$  fraction volumique,  $u$  vitesse,  $\rho$  masse volumique (constante).

- ▷ Loi rhéologique

$$\sigma \in \partial \Psi(\phi, s, Du),$$

avec  $\Psi(\phi, s, D)$  potentiel viscoplastique, convexe par rapport à  $D$  ( $D$  est aussi souvent noté  $D = \dot{\epsilon}$ ). Le sous-différentiel est pris par rapport à  $D$ .

- ▷ Compatibilité thermodynamique

$$\partial \Psi(\phi, s, 0) \ni -p_0(\phi, s) \operatorname{Id},$$

où  $p_0(\phi, s)$  est la loi de pression qui vérifie une identité thermodynamique

$$de_0 = -\frac{p_0}{\rho} d\left(\frac{1}{\phi}\right) + T ds,$$

où  $e_0(\phi, s)$  est l'énergie spécifique,  $T(\phi, s) > 0$  la température.

- ▷ On peut écrire  $\sigma = -p \operatorname{Id} + \sigma'$ ,  $\operatorname{tr}(\sigma') = 0$ .  $p$  est la pression effective, qu'on mesure.

- ▷ On complète les deux équations de conservation de masse et quantité de mouvement par une équation d'énergie

$$\partial_t(\rho\phi\frac{|u|^2}{2} + \rho\phi e_0) + \operatorname{div}(\rho\phi\frac{|u|^2}{2}u + \rho\phi e_0u) = \operatorname{div}(\sigma u) + \operatorname{div}(\kappa\nabla T) + \phi f \cdot u.$$

- ▷ Des trois lois de conservation on déduit l'identité d'entropie

$$\partial_t(\rho\phi s) + \operatorname{div}(\rho\phi su) - \frac{1}{T}(\sigma : Du + p_0 \operatorname{tr}(Du)) - \operatorname{div}\left(\kappa\frac{\nabla T}{T}\right) - \kappa\frac{|\nabla T|^2}{T^2} = 0.$$

La compatibilité thermodynamique implique

$$\sigma : Du + (p_0 \operatorname{Id}) : Du \geq 0,$$

donc l'identité d'entropie a un terme source signé.

- ▷ Invariance par changement de référentiel :  $\Psi(\phi, s, D)$  ne dépend que de  $\phi$ ,  $s$  et de  $\operatorname{tr}(D^k)$ ,  $k = 1, \dots, N$ . On peut décomposer

$$D = \frac{\operatorname{tr}(D)}{N} \operatorname{Id} + D', \quad \operatorname{tr}(D') = 0.$$

C'est une décomposition orthogonale car  $0 = \operatorname{tr}(D') = D' : \operatorname{Id}$ . Alors

$$\operatorname{tr}(D^2) = |D|^2 = |D'|^2 + \operatorname{tr}(D)^2/N.$$

Donc en 2d  $\Psi$  ne dépend que de  $\operatorname{tr}(D)$  et de  $|D'|$ .

En 3d  $\Psi$  peut en plus dépendre de  $\det(D)$ .

- ▷ Exemple : fluide newtonien

$$\Psi(\phi, s, D) = -p_0(\phi, s) \operatorname{tr} D + \eta(\phi, s) \frac{|D|^2}{2} + \lambda(\phi, s) \frac{(\operatorname{tr} D)^2}{2}.$$

On a  $\partial\Psi(\phi, s, 0) = \{-p_0(\phi, s) \operatorname{Id}\}$ , la compatibilité thermodynamique est vérifiée.

- ▷ Une loi est "purement plastique" (ie sans viscosité) si  $\Psi$  est homogène de degré 1, ie

$$\forall \lambda > 0 \quad \Psi(\lambda D) = \lambda \Psi(D).$$

Alors  $\partial\Psi$  est homogène de degré 0, donc la loi  $\sigma \in \partial\Psi(\phi, s, D)$  ne dépend (pour  $D \neq 0$ ) que de  $D/|D|$ , et pas de  $|D|$ . On dit aussi qu'elle est "rate independent".

- ▷ Exemple de loi purement plastique :

$$\Psi(\phi, s, D) = -p_0(\phi, s) \operatorname{tr}(D) + \mu_s p_0(\phi, s) |D'|,$$

avec  $\mu_s$  constant (ou dépendant de  $\phi, s$ ).

▷ Exemple : modèle Drucker dilatant (Andreotti-Forterre-Pouliquen p.158)

$$\Psi = p_0 (\sin \psi |D'| - \text{tr}(D))_+.$$

Alors pour  $D' \neq 0$

$$\partial_D \Psi = p_0 \mathbf{1}_{\text{tr}(D) \leq \sin \psi |D'|} \left( \sin \psi \frac{D'}{|D'|} - \text{Id} \right),$$

donc

$$p = p_0 \mathbf{1}_{\text{tr}(D) \leq \sin \psi |D'|}, \quad \sigma' = p_0 \sin \psi \mathbf{1}_{\text{tr}(D) \leq \sin \psi |D'|} \frac{D'}{|D'|} = \sin \psi p \frac{D'}{|D'|}.$$

On retrouve une loi de type Drucker-Prager (compressible), mais avec  $\sin \psi$  constant (pas de viscosité). On remarque que  $p$  est toujours positif ou nul (c'est le cas dans tous les modèles écrits ici). On a

$$\partial \Psi(0) = \{ \sigma \mid \sigma = p_0 \alpha (\sin \psi V - \text{Id}), \text{ avec } |V| \leq 1, \text{ tr}(V) = 0, 0 \leq \alpha \leq 1 \}.$$

On a bien la compatibilité thermodynamique  $\partial \Psi(0) \ni -p_0 \text{Id}$ .

▷ Exemple : le modèle **Cam-Clay**

$$\psi = \frac{p_0}{2} \frac{\sin \delta |D'|}{Y + \sqrt{1 + Y^2}}, \quad \text{avec } Y = \frac{\text{tr}(D)}{|D'| \sin \delta}.$$

Alors on vérifie que  $p$  vérifie  $0 \leq p \leq p_0$ , et  $p$  est déterminé par l'équation

$$\frac{\text{tr}(D)}{|D'|} = \frac{1}{2} \sin \delta \frac{p_0/p - 2}{\sqrt{p_0/p - 1}},$$

tandis que  $\sigma'$  est donné par

$$\sigma' = \sin \delta p \sqrt{p_0/p - 1} \frac{D'}{|D'|}.$$

▷ On a un effet de **dilatance** :

$$\text{tr}(D) \geq 0 \text{ pour } p \leq p_0/2, \quad \text{tr}(D) \leq 0 \text{ pour } p \geq p_0/2.$$

On dit que  $p_0/2$  est la **pression critique** (et rappelons que  $p_0 = p_0(\phi, s)$ ).

▷ C'est encore un modèle purement plastique (sans viscosité).

▷ **Dilatance pour une loi générale.** Pour une loi générale  $\Psi$ , par la relation  $\sigma \in \partial\Psi(D)$ , décomposant  $D = (\text{tr } D, D')$  on déduit (là où  $\Psi$  est différentiable) les lois  $p(\text{tr } D, D')$  et  $\sigma'(\text{tr } D, D')$ . On peut alors définir

$$p_c(D') = -p(\text{tr } D = 0, D').$$

Comme  $\Psi$  est convexe,  $p = -\partial\Psi/\partial(\text{tr } D)$  est décroissante par rapport à  $\text{tr } D$ . On en déduit

$$\begin{aligned} \text{div } u = \text{tr } D > 0 &\Leftrightarrow p < p_c(D'), \\ \text{tr } D < 0 &\Leftrightarrow p > p_c(D'). \end{aligned}$$

**Les modèles purement plastiques.** Pour les modèles purement plastiques ( $\Psi$  homogène de degré 1), on a des propriétés particulières.

- ▷ En chaque  $D$  pour lequel  $\Psi$  est différentiable en  $D$ ,  $\sigma = \partial_D \Psi$  ne dépend que de  $D/|D|$ , il reste donc dans une sous-variété de codimension 1.
- ▷ En chaque  $D$  pour lequel  $\Psi$  est différentiable en  $D$ , une petite variation  $\delta D$  de  $D$  induit une variation  $\delta\sigma$  de  $\sigma$ , qui vérifie

$$\delta\sigma : D = 0.$$

On dit que la rhéologie est "**associée**". La déformation est normale à la variété où vit  $\sigma$ .

- ▷ La démonstration est la suivante.  $\Psi$  est homogène de degré 1

$$\Psi(\lambda D) = \lambda \Psi(D).$$

Dérivant par rapport à  $D$  on trouve

$$\partial_D \Psi(\lambda D) = \partial_D \Psi(D),$$

ie  $\partial_D \Psi$  est homogène de degré 0. Dérivant ensuite par rapport à  $\lambda$  on trouve

$$\partial_{DD}^2 \Psi(\lambda D) D = 0.$$

Prenant  $\lambda = 1$  et notant que  $\partial_{DD}^2 \Psi(D) = \delta\sigma$ , on obtient le résultat.

### Conclusion

- ▷ Il faut trouver la bonne loi compressible qui incorpore  $\mu(I)$  !
- ▷ Ensuite il faudra également superposer de l'élasticité...

- [1] O. Pouliquen, Scaling laws in granular flows down rough inclined planes, *Phys. Fluids* 11, 542, 1999, <http://dx.doi.org/10.1063/1.869928>
- [2] O. Pouliquen, Y. Forterre, Friction law for dense granular flows : Application to the motion of a mass down a rough inclined plane, *J. Fluid Mech.* 453, 133-151, 2002, <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112001006796>
- [3] B. Andreotti, Y. Forterre, O. Pouliquen, *Les milieux granulaires, entre fluide et solide*, EDP sciences et CNRS éditions, collection savoirs actuels, 2011.
- [4] T. Barker, D.G. Schaeffer, P. Bohorquez, J.M.N.T. Gray, Well-posed and ill-posed behaviour of the  $\mu(I)$ -rheology for granular flow, *J. Fluid Mech.* 779, 794-818, 2015, <http://dx.doi.org/10.1017/jfm.2015.412>
- [5] N. Martin, I.R. Ionescu, A. Mangeney, F. Bouchut, M. Farin, Continuum viscoplastic simulation of a granular column collapse on large slopes :  $\mu(I)$  rheology and lateral wall effects, *Phys. Fluids* 29, 013301, 2017, <http://dx.doi.org/10.1063/1.4971320>
- [6] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973. North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50).

- [7] G. Duvaut and J.-L. Lions, Inequalities in mechanics and physics, Springer-Verlag, Berlin, 1976. Translated from the French by C. W. John, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 219.
- [8] R. Glowinski, J.-L. Lions, and R. Trémolières, Numerical analysis of variational inequalities, volume 8 of Studies in Mathematics and its Applications. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1981. Translated from the French.
- [9] R. Temam, Problèmes mathématiques en plasticité, volume 12 of Méthodes Mathématiques de l'Informatique. Gauthier-Villars, Montrouge, 1983.
- [10] R. Glowinski, Numerical methods for nonlinear variational problems, Springer 2008 (reprint from the 1984 edition).
- [11] H. Brézis, Monotonicity in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations, 101-156, in "Contributions to nonlinear functional analysis", ed. by E. Zarantonello, Academic, New-York, 1971.
- [12] M. Fortin, R. Glowinski, Studies in Mathematics and its Applications 15(C), 1983.

- [13] P. Saramito, N. Roquet, An adaptive finite element method for viscoplastic fluid flows in pipes, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 190, 5391-5412, 2001, [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(01\)00175-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00175-X)
- [14] D. Bresch, E. D. Fernández-Nieto, I. R. Ionescu, P. Vigneaux, Augmented Lagrangian method and compressible visco-plastic flows : applications to shallow dense avalanches. In *New directions in mathematical fluid mechanics*, *Adv. Math. Fluid Mech.*, 57-89. Birkhäuser Verlag, Basel, 2010.
- [15] E. D. Fernández-Nieto, J. M. Gallardo, P. Vigneaux, Efficient numerical schemes for viscoplastic avalanches. Part 1 : The 1D case. *J. Comput. Phys.* 264, 55-90, 2014, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2014.01.026>
- [16] P. Saramito, A damped Newton algorithm for computing viscoplastic fluid flows, *J. Non-newtonian fluid mechanics* 238, 6-15, 2016, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jnnfm.2016.05.007>
- [17] P. Saramito, A. Wachs, Progress in numerical simulation of yield stress fluid flows, *Rheologica Acta* 56, 211-230, 2017, <http://dx.doi.org/10.1007/s00397-016-0985-9>

- [18] F. Bouchut, R. Eymard, A. Prignet, Convergence of conforming approximations for inviscid incompressible Bingham fluid flows and related problems, *J. Evolution Eq.*, 14, 635-669, 2014. <http://dx.doi.org/10.1007/s00028-014-0231-9>
- [19] Chambolle, T. Pock, An introduction to continuous optimization for imaging, *Acta Numerica*, 161-319, 2016, <http://dx.doi.org/10.1017/S096249291600009X>
- [20] A. Chambolle, T. Pock, A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging, *J. Math. Imaging and Vision* 40, 120-145, 2011, <http://dx.doi.org/10.1007/s10851-010-0251-1>
- [21] E.J. Dean, R. Glowinski, G. Guidoboni, On the numerical simulation of Bingham visco-plastic flow : Old and new results, *J. Non-newtonian Fluid Mech.* 142, 36-62, 2007, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jnnfm.2006.09.002>
- [22] L. Chupin, T. Dubois, A bi-projection method for Bingham type flows, *Computers and Mathematics with Applications* 72, 1263-1286, 2016, <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2016.06.026>

- [23] C. Lusso, A. Ern, F. Bouchut, A. Mangeney, M. Farin, O. Roche, Two-dimensional simulation by regularization of free surface viscoplastic flows with Drucker-Prager yield stress and application to granular collapse, *J. Comput. Phys.* 333, 387-408, 2017, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2016.12.036>
- [24] T. Barker, D.G. Schaeffer, M. Shearer, J.M.N.T. Gray, Well-posed continuum equations for granular flow with compressibility and  $\mu(I)$  rheology, *Proc. Royal Soc. A* 473, 20160846, 2017, <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2016.0846>
- [25] J. Heyman, R. Delannay, H. Tabuteau, A. Valance, Compressibility regularizes the  $\mu(I)$ -rheology for dense granular flows, preprint 2017.
- [26] F. Bouchut, E.D. Fernandez-Nieto, A. Mangeney, G. Narbona-Reina, A two-phase two-layer model for fluidized granular flows with dilatancy effects, *J. Fluid Mech.* 801, 166-221, 2016. <http://dx.doi.org/10.1017/jfm.2016.417>