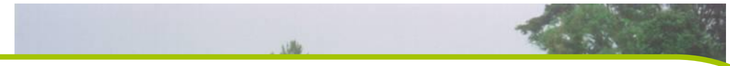
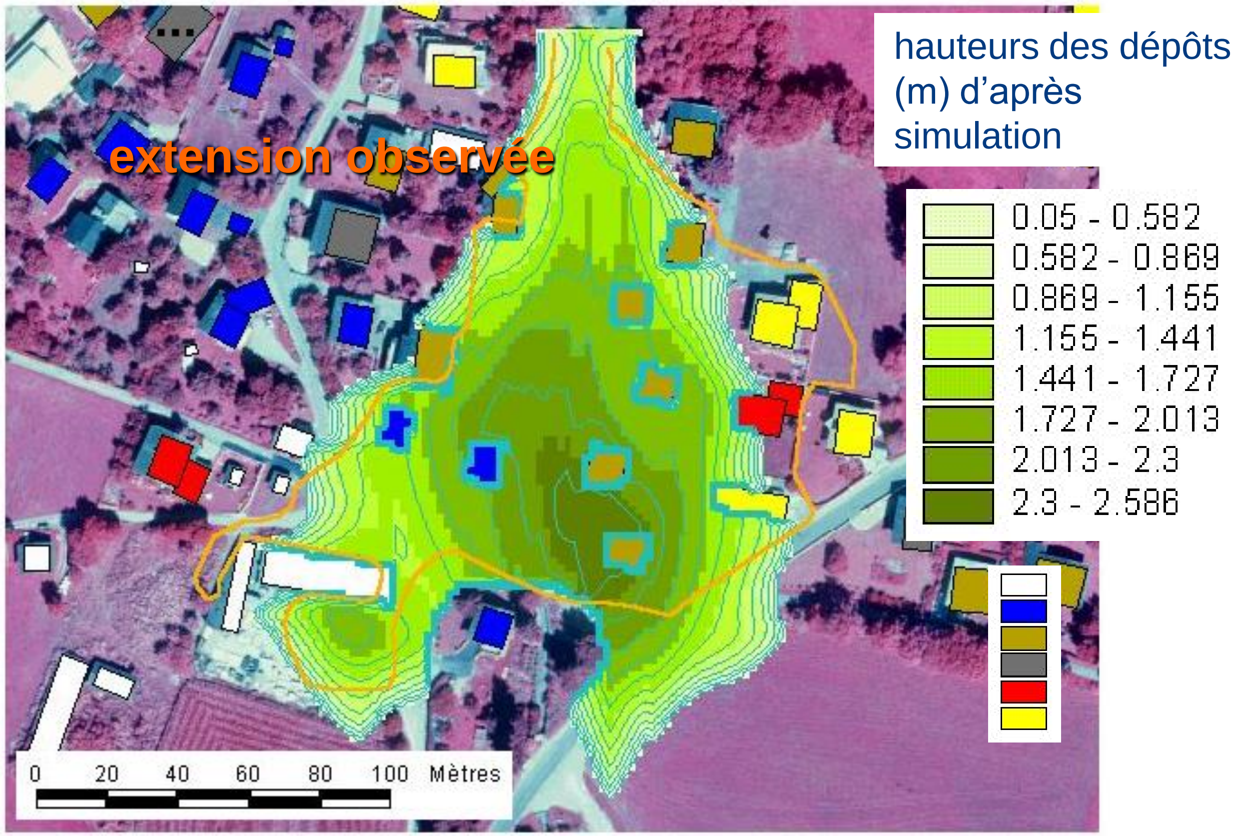
Dynamique interne d'écoulements à surface libre de fluides à seuil

P. Freydier, G. Chambon

Université Grenoble-Alpes, IRSTEA,
Unité de Recherche Erosion Torrentielle, Neige et Avalanches.

Modélisation des écoulements géophysiques

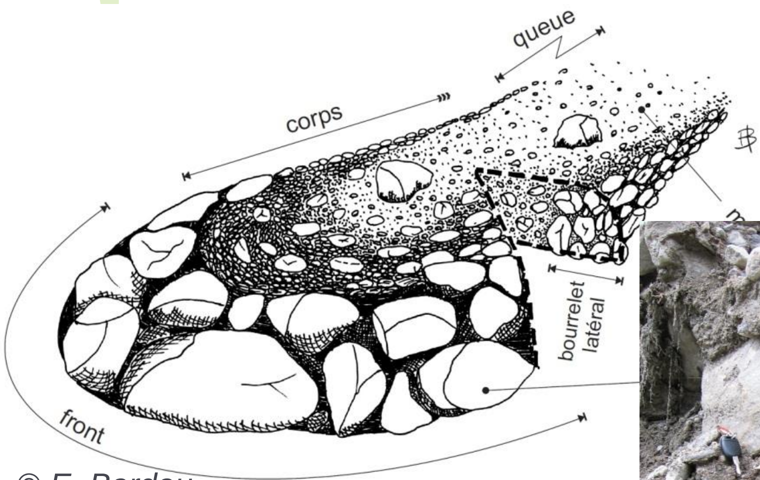




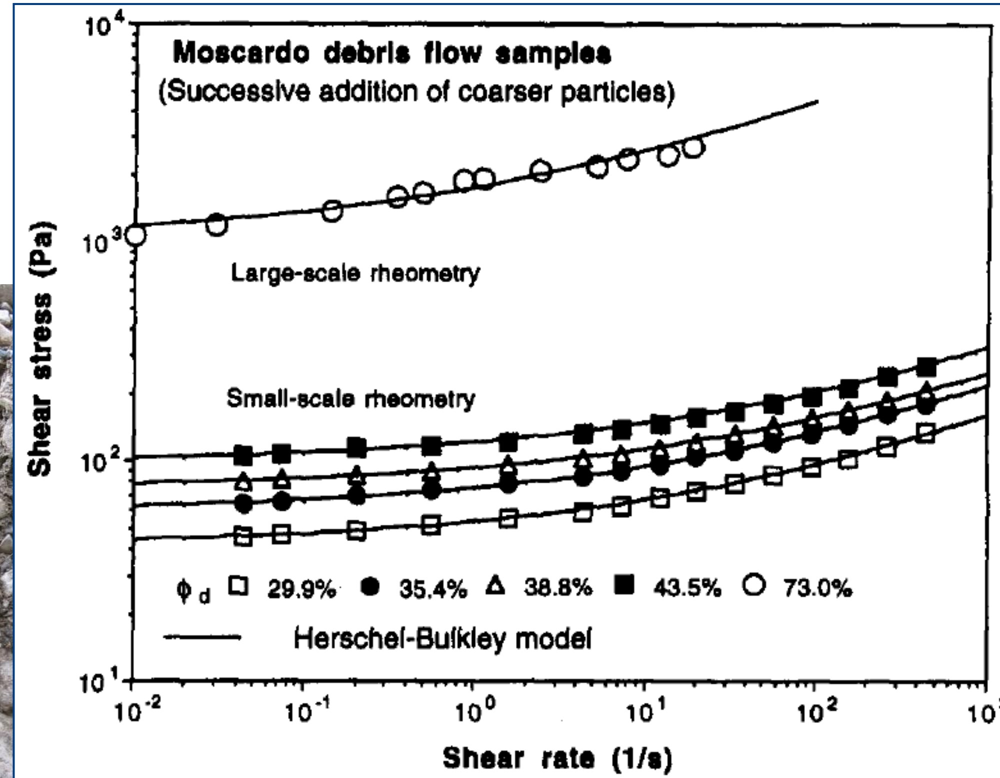
Modèle LAVE2D (Irstea)

Enjeux: prévision et gestion des risques naturels (laves torrentielles, coulées de boue,…)

Rhéologie des écoulements boueux



© E. Bardou

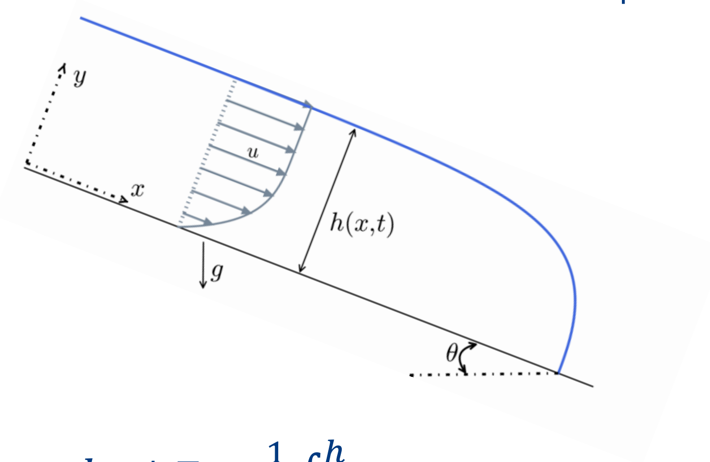


Coussot et al., 1998

- Fortes hétérogénéités
- En première approximation: comportement de **fluide à seuil (Herschel-Bulkley):**

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = 0 & \text{si } \tau < \tau_c \\ \tau = \tau_c + K\dot{\gamma}^n & \text{si } \tau \geq \tau_c \end{cases}$$

Modèle de Saint-Venant



Hypothèse : $\epsilon = \frac{H}{L} \ll 1$

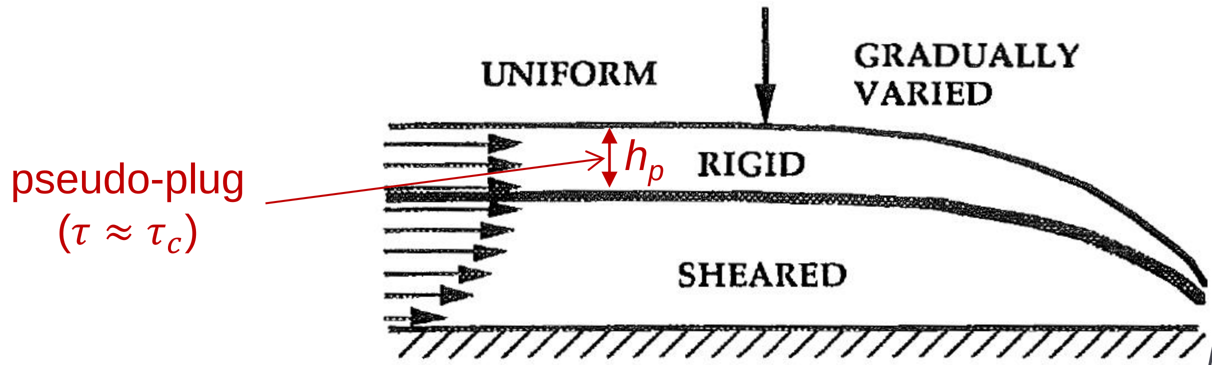
Système d'équations intégrées dans l'épaisseur pour h et $\bar{u} = \frac{1}{h}\int_0^h u$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial (h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial (h\beta\bar{u}^2)}{\partial x}}_{\text{inertie}} = \underbrace{\rho g h \sin\theta}_{\text{accélération gravitaire}} - \underbrace{\rho g h \cos\theta \frac{\partial h}{\partial x}}_{\text{gradient de pression}} - \underbrace{\tau_b}_{\text{contrainte basale}}$$

- **Rhéologie du fluide prise en compte dans β et $\tau_b(\bar{u}, h)$**
  - ➢ fonctions de la forme du profil de vitesse dans l'écoulement

Fermeture classique pour les fluides à seuil



Piau,1996

$\tau_b(\bar{u}, h)$ dépend de h_p : $\tau_b = \tau_c + K \left[\frac{2n+1}{n} \frac{h\bar{u}}{(h - h_p)(h + \frac{n}{n+1} h_p)} \right]^n$

- Fermeture heuristique basée sur le régime permanent uniforme
- Mais: profils RPU non autosimilaires
  - **Evolution de h_p dans les zones non-uniformes ?**
  - Hypothèse classique : $\frac{h_p}{h} = \frac{\tau_c}{\tau_b}$
- **Besoin d'informations sur la dynamique interne des écoulements**

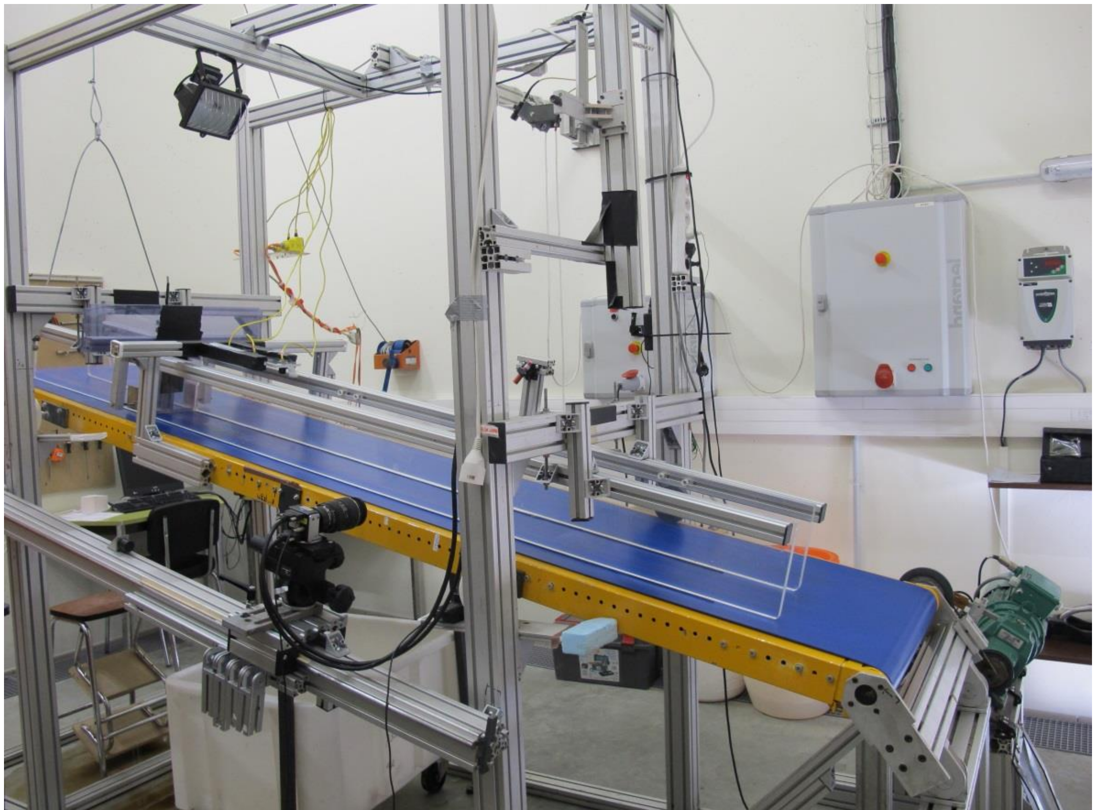
Plan de la présentation

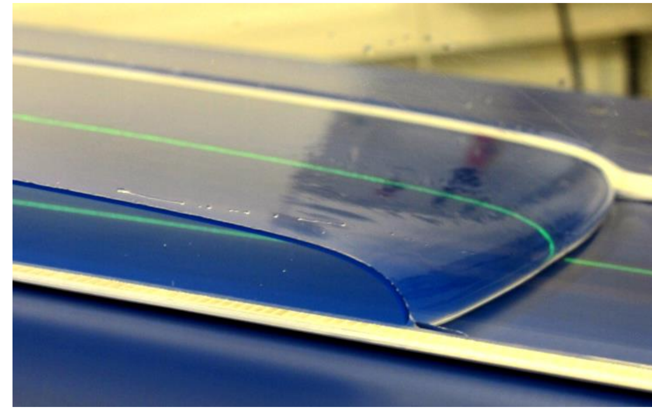
- Résultats expérimentaux
- Développement asymptotique pour les profils de vitesse (couche mince)
  - ordre 0
  - ordre 1
- Confrontation modèles - expériences

irstea

Dispositif expérimental

Canal à fond mobile (tapis roulant)





- Fluide viscoplastique modèle: gel de Carbopol

Caractéristiques des coulées:

$L \approx 1\, m$

$h = 5 - 30\, mm$

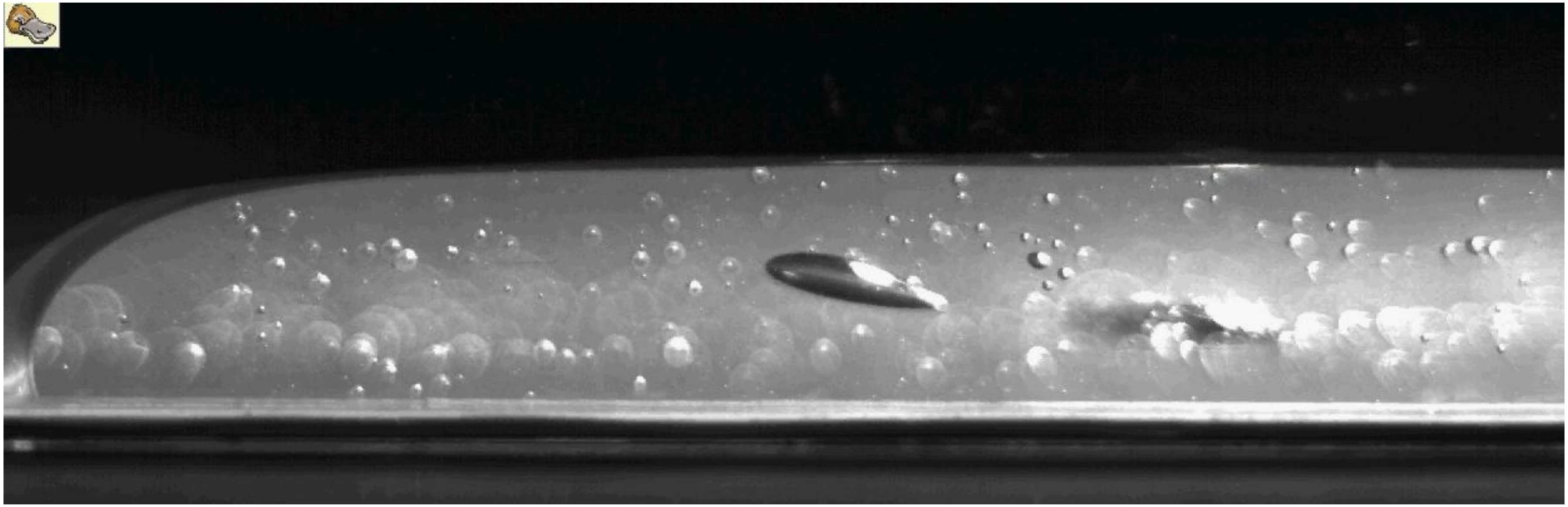
$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gh\cos\theta}} = 0{,}05 - 0{,}5$$

$$Re = \frac{\rho u^{2-n} h^n}{K} = 0{,}05 - 2$$

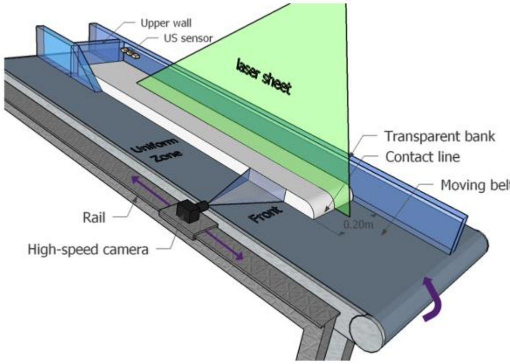
$$G = \frac{\tau_c}{\rho g h \sin\theta} = 0{,}15 - 0{,}35$$

Dispositif expérimental

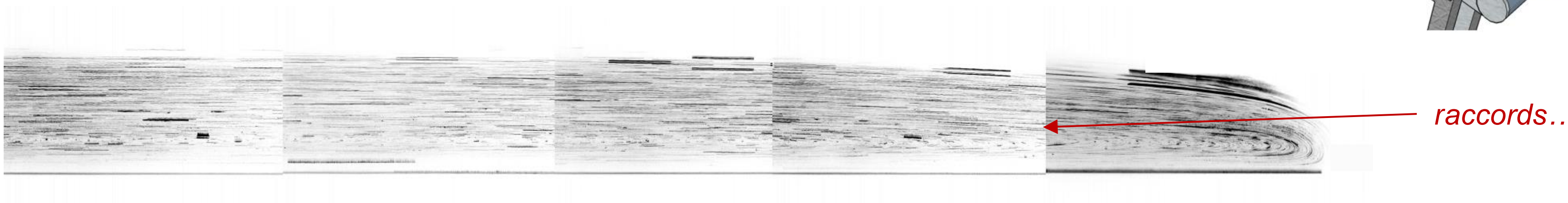
Canal à fond mobile (tapis roulant)



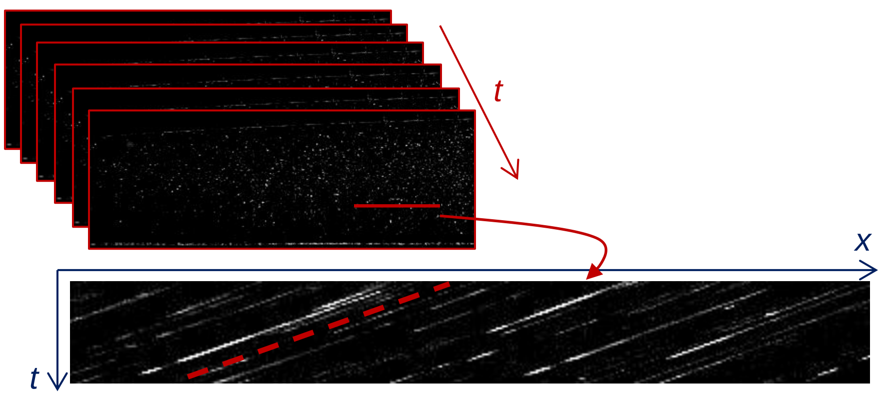
Vélocimétrie locale

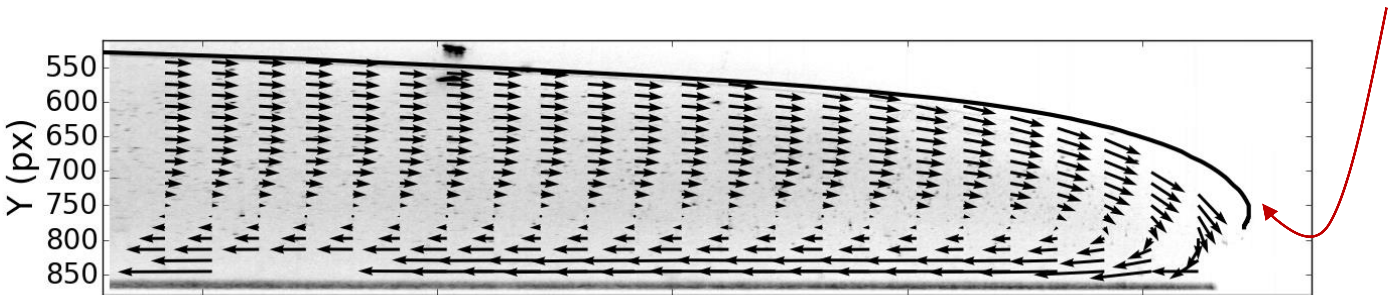


Imagerie haute résolution (26 px/mm)
au centre de l'écoulement



- **Analyse spatio-temporelle**
  - inclinaison des lignes mesurée automatiquement (tenseur de structure)
  - généralisable à « 3D » (u_x, u_y) à haute résolution

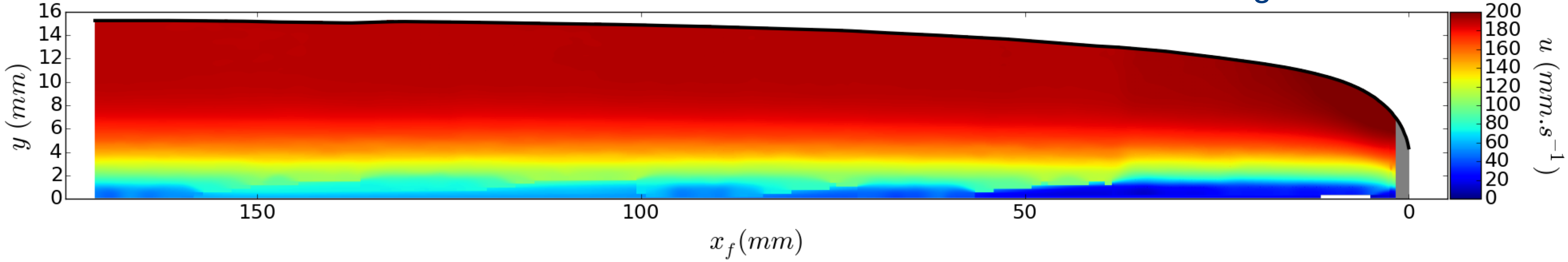




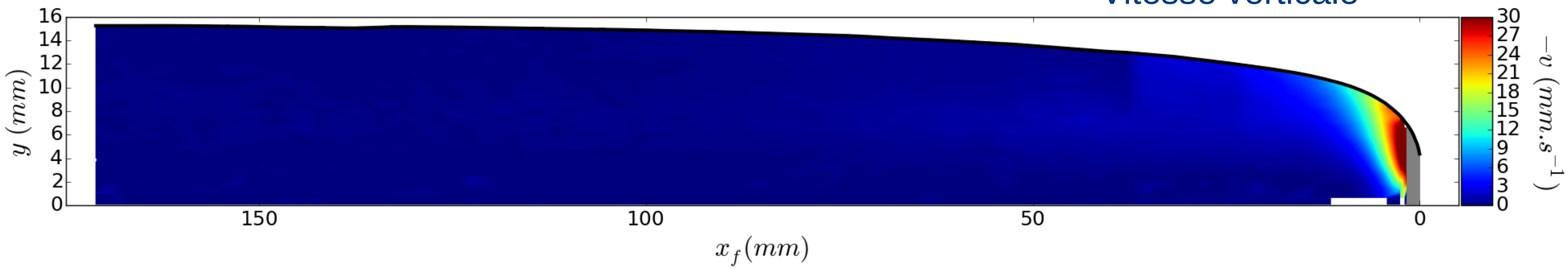
Résultats expérimentaux

Champ de vitesse

Vitesse longitudinale

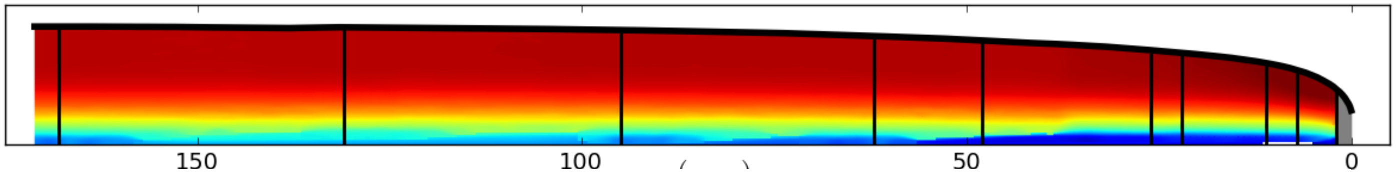


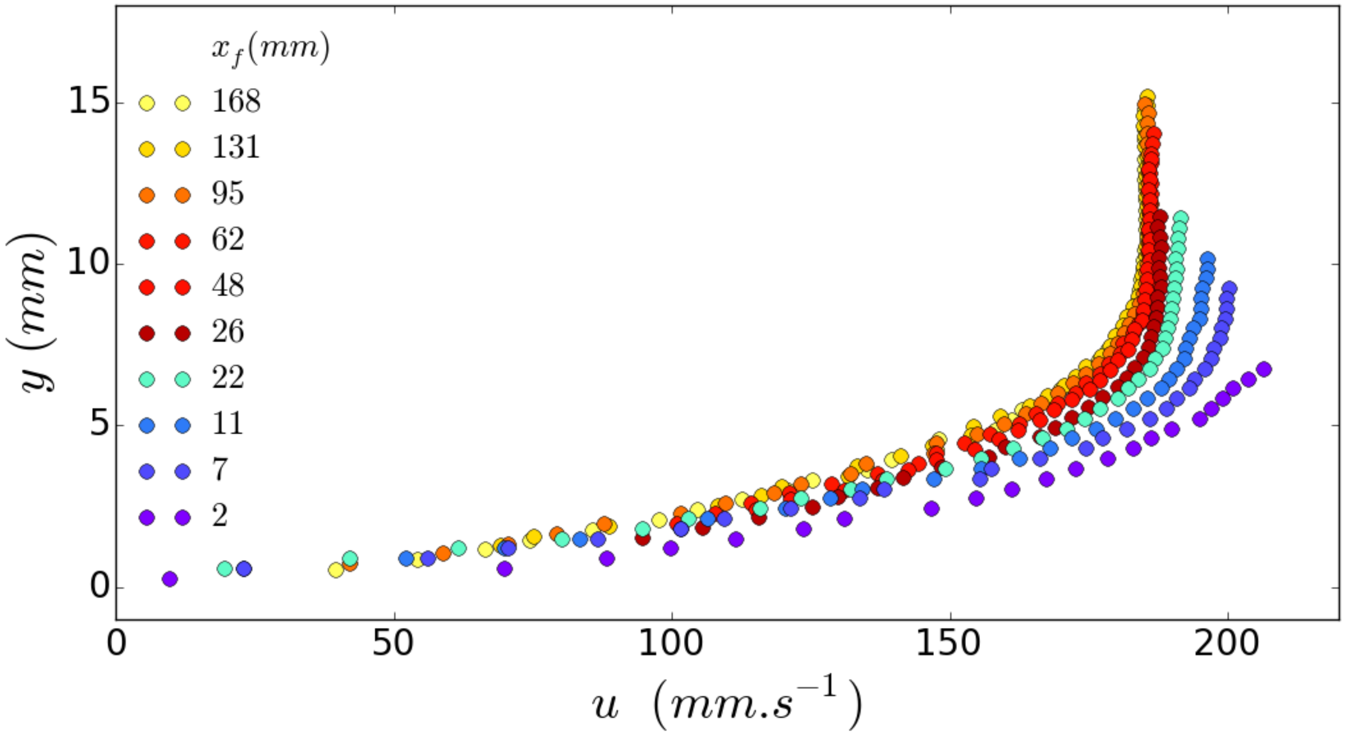
Vitesse verticale



Résultats expérimentaux

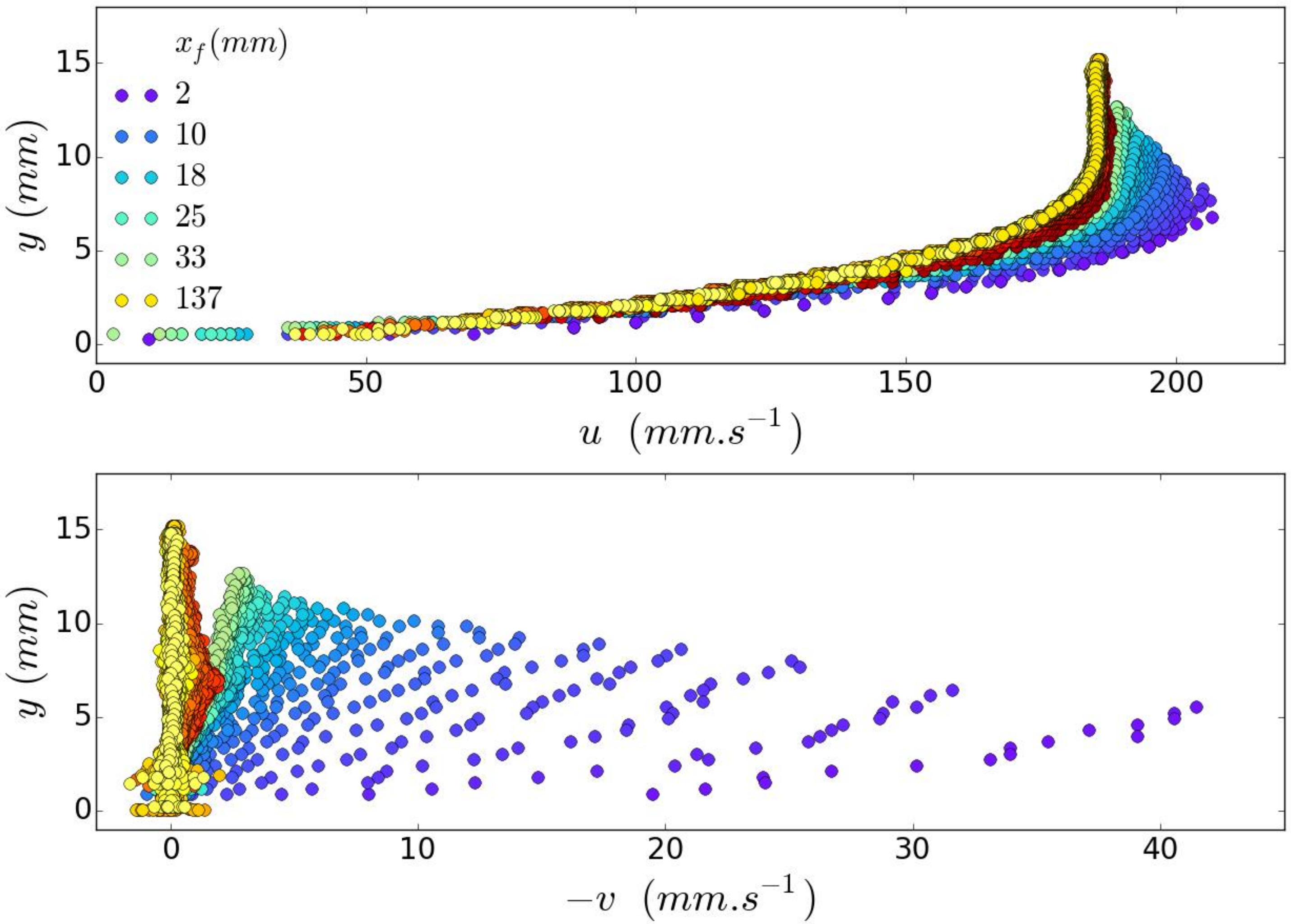
Profils de vitesse en se rapprochant du front





Résultats expérimentaux

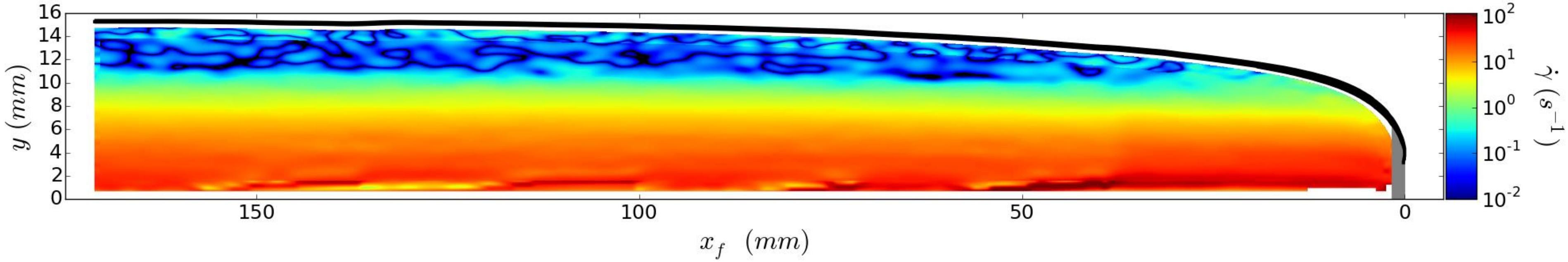
Profils de vitesse en se rapprochant du front



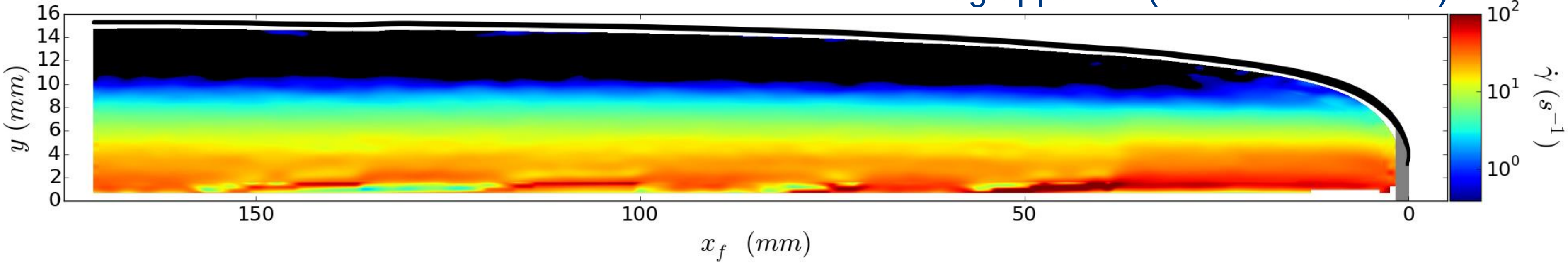
Résultats expérimentaux

Plug

Taux de cisaillement



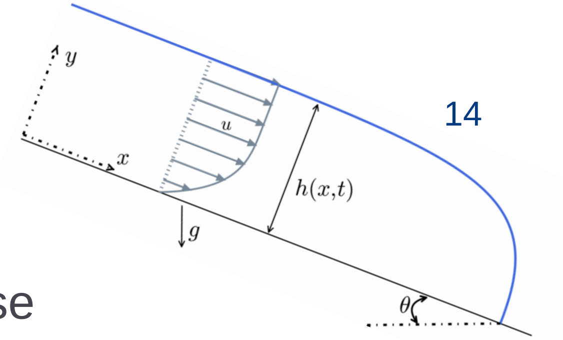
Plug apparent (seuil: 0.2 – 0.3 s^{-1})



➢ Plug disparaît à l'approche du front

Modèle de couche mince: $\epsilon \ll 1$

Développement asymptotique des profils de vitesse



Approche inspirée de *Fernandez-Nieto, Noble & Vila, JNNFM, 2010:*

$$u = u^{(0)} + \epsilon u^{(1)} + \cdots$$
$$v = v^{(0)} + \epsilon v^{(1)} + \cdots$$
$$p = p^{(0)} + \epsilon p^{(1)} + \cdots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\epsilon Re\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{Re}{Fr^2}\tan\theta - \epsilon\frac{\boldsymbol{Re}}{\boldsymbol{Fr^2}}\frac{\partial p}{\partial x} + Bi\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \epsilon Bi\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}$$

$$\epsilon^3 Re\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\epsilon\frac{Re}{Fr^2} - \epsilon\frac{Re}{Fr^2}\frac{\partial p}{\partial y} + \epsilon^2 Bi\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \epsilon Bi\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}$$

+ loi constitutive: Herschel-Bulkley
+ CL au fond: $u(y=0) = v(y=0) = 0$
+…

$$Bi = \frac{\tau_c}{K}\left(\frac{H}{U}\right)^n$$

- **Choix d'échelles:** $Re, Bi = O(1);\ \epsilon\frac{Re}{Fr^2} = O(1)$

Fluide de HB: ordre 0

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\cancel{\epsilon Re\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)} = \overbrace{\frac{Re}{Fr^2}\tan\theta}^{\lambda} - \epsilon\frac{Re}{Fr^2}\frac{\partial p}{\partial x} + Bi\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \cancel{\epsilon Bi\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}}$$

$$\cancel{\epsilon^3 Re\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right)} = -\epsilon\frac{Re}{Fr^2} - \epsilon\frac{Re}{Fr^2}\frac{\partial p}{\partial y} + \cancel{\epsilon^2 Bi\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}} + \cancel{\epsilon Bi\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}}$$

- **Régime de lubrification:**

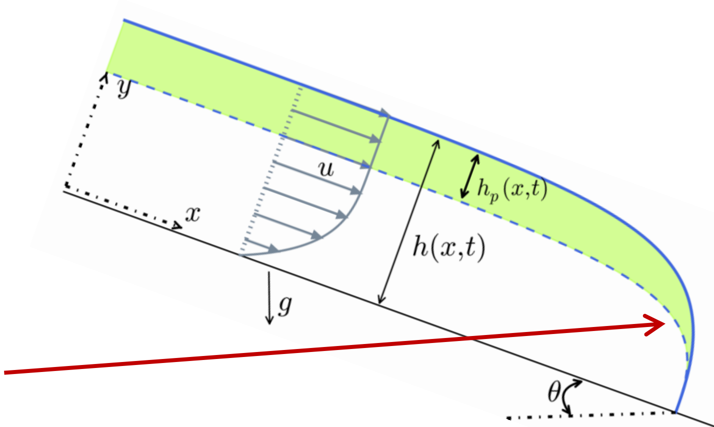
$$u^{(0)}(x,y,t) = u_p(x,t)\left[1-\left(1-\frac{y}{h(x,t)-h_p(x,t)}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right] \text{ si } y < h - h_p$$

$$u^{(0)}(x,y,t) = u_p(x,t) \text{ si } y \geq h - h_p$$

$$u_p(x,t) = \frac{n}{n+1}\Lambda(x,t)^{1/n}(h-h_p)^{(n+1)/n}$$

$$h_p(x,t) = \frac{Bi}{\Lambda(x,t)}$$

$$\Lambda = \lambda - \frac{\epsilon Re}{Fr^2}\,\partial_x h$$



Fluide de HB: ordre 1

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\epsilon Re \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{Re}{Fr^2} \tan\theta - \epsilon \frac{Re}{Fr^2} \frac{\partial p}{\partial x} + Bi \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \epsilon Bi \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}$$

$$\cancel{\epsilon^3 Re \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)} = -\epsilon \frac{Re}{Fr^2} - \epsilon \frac{Re}{Fr^2} \frac{\partial p}{\partial y} + \cancel{\epsilon^2 Bi \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}} + \epsilon Bi \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}$$

$$u^{(1)}(x,y,t) = u^{(0)}(x,y,t) + \overbrace{\epsilon Re\, \mathcal{U}_I(x,y,t)}^{\text{correction inertielle}} + \overbrace{\epsilon Bi\, \mathcal{U}_N(x,y,t)}^{\text{correction liée aux contraintes normales}} \quad \text{si } y < h - h_p$$

$$u^{(1)}(x,y,t) = u_p{}^{(0)}(x,t) + \epsilon Re\, \mathcal{U}_I(x, h-h_p, t) + \epsilon Bi\, \mathcal{U}_N(x, h-h_p, t) + \underbrace{\epsilon Bi\, \mathcal{U}_{ns}(x,y,t)}_{\text{pseudo-plug: } |\sigma| = Bi\sqrt{\sigma_{xy}{}^2 + \sigma_{xx}{}^2} + O(\epsilon) = Bi + O(\epsilon)} \quad \text{si } y \geq h - h_p$$

Termes correctifs: inertie

$$\zeta = 1 - \frac{y}{h - h_p}$$

$$\varpi_p = \frac{h_p}{h - h_p}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{\mathcal{I}}(\zeta) = \Lambda^{(3-n)/n}\,(h-h_p)^{(2n+3)/n} p_{\mathcal{U},1}(\zeta,\varpi_p)\,\partial_x h \\ + \Lambda^{(3-2n)/n}\,(h-h_p)^{(3n+3)/n} p_{\mathcal{U},2}(\zeta,\varpi_p)\,\partial_x \Lambda \\ - \Lambda^{(2-2n)/n}\,(h-h_p)^{(2n+2)/n} p_{\mathcal{I},1}(\zeta,\varpi_p)\,\partial_t \Lambda\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_{\mathcal{U},1}(\zeta,\varpi_p) &= \left(\tfrac{3n+2}{2(n+1)^2(2n+1)} - \tfrac{1}{(n+1)^2}\zeta^{(n+1)/n} + \tfrac{n}{2(n+1)^2(2n+1)}\zeta^{(2n+2)/n}\right) \\ &+ \varpi_p\left(\tfrac{n+4}{(n+1)(n+2)} - \tfrac{1}{n+1}\zeta^{1/n} - \tfrac{1}{n+1}\zeta^{(n+1)/n} + \tfrac{n}{(n+1)(n+2)}\zeta^{(n+2)/n}\right) \\ &+ \varpi_p^2\left(1-\zeta^{1/n}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_{\mathcal{U},2}(\zeta,\varpi_p) &= \left(\tfrac{12+24n+3n^2-11n^3}{6(n+1)^3(2n+1)(3n+2)} - \tfrac{1+n-n^2}{(n+1)^3(2n+1)}\zeta^{(n+1)/n} + \tfrac{n(1-n)}{2(n+1)^3(2n+1)}\zeta^{(2n+2)/n}\right. \\ &\qquad \left. + \tfrac{n^3}{3(n+1)^3(2n+1)(3n+2)}\zeta^{(3n+3)/n}\right) \\ &+ \varpi_p\left(\tfrac{12+18n-7n^2-2n^3}{2(n+1)^2(n+2)(2n+1)} - \tfrac{1+n-n^2}{(n+1)^2(2n+1)}\zeta^{1/n} - \tfrac{2-n}{(n+1)^2}\zeta^{(n+1)/n}\right. \\ &\qquad \left. + \tfrac{n(1-n)}{(n+1)^2(n+2)}\zeta^{(n+2)/n} + \tfrac{n}{2(n+1)^2(2n+1)}\zeta^{(2n+2)/n}\right) \\ &+ \varpi_p^2\left(\tfrac{6-n^2}{(n+1)(n+2)} - \tfrac{2-n}{n+1}\zeta^{1/n} - \tfrac{1}{n+1}\zeta^{(n+1)/n} + \tfrac{n}{(n+1)(n+2)}\zeta^{(n+2)/n}\right) \\ &+ \varpi_p^3\left(1-\zeta^{1/n}\right)\end{aligned}$$

Termes correctifs: contraintes normales

$$\zeta = 1 - \frac{y}{h - h_p}$$

$$\varpi_p = \frac{h_p}{h - h_p}$$

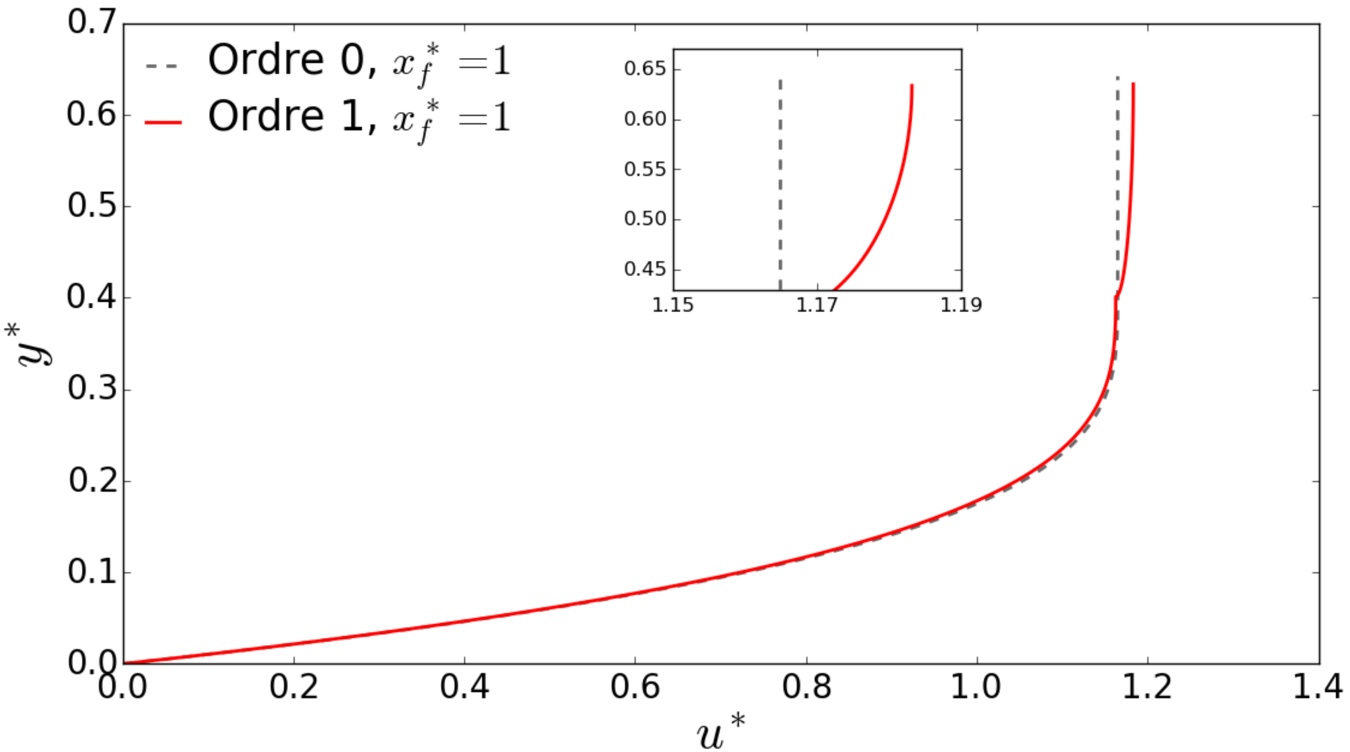
$$\mathcal{U}_{\mathcal{N}}(\zeta) = -\frac{\pi}{2}\Lambda^{(1-2n)/n}\, h_p(h-h_p)^{1/n}(1-\zeta^{1/n})\,\mathrm{sgn}\left(\partial_x u_{pl}^{(0)}\right)\ \partial_x\Lambda$$

$$\mathcal{U}_{ns}(y) = 2\sqrt{1-\left(\frac{h-y}{h_p}\right)^2}\times$$

$$\left[\Lambda^{(1-n)/n}\ (h-h_p)^{1/n}\partial_x h + \Lambda^{(1-2n)/n}\ (h-h_p)^{(n+1)/n}\left(\tfrac{1}{n+1}+\varpi_p\right)\partial_x\Lambda\right]\mathrm{sgn}\left(\partial_x u_{pl}^{(0)}\right)$$

Comparaison des modèles

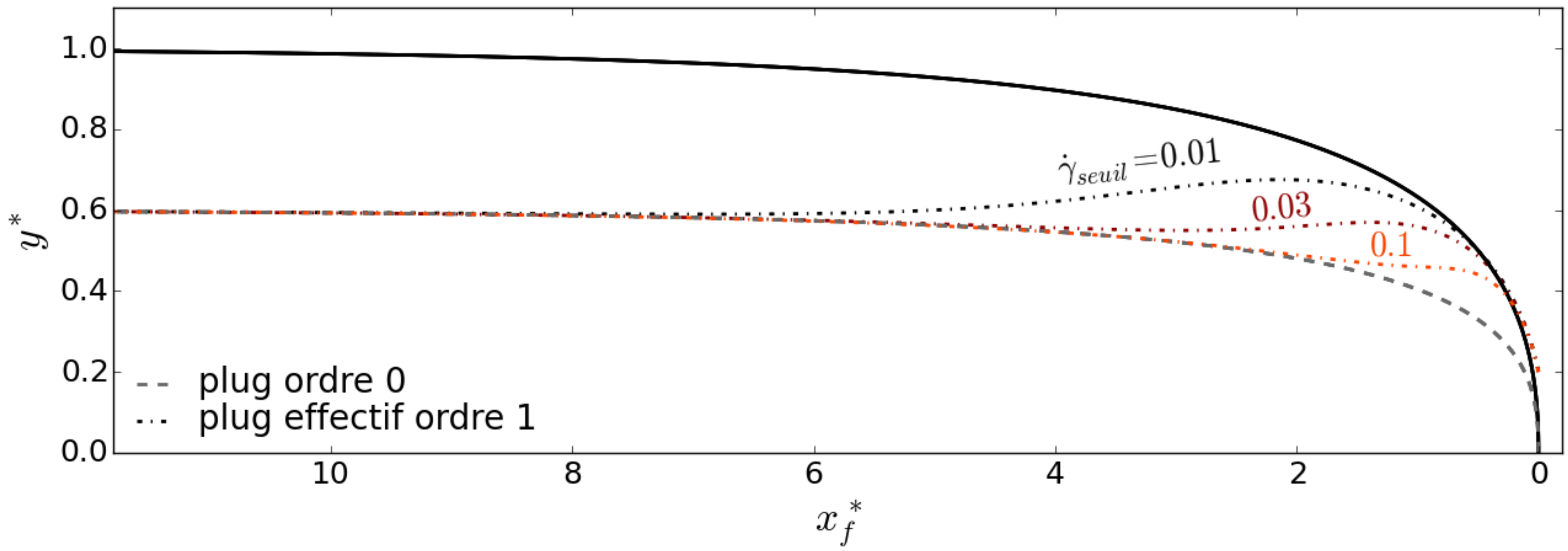
Profils de vitesse



- Cisaillement dans le pseudo-plug à l'ordre 1
- Vitesse de surface supérieure à l'ordre 1
- Raccord non dérivable

Comparaison des modèles :

Plug « effectif »

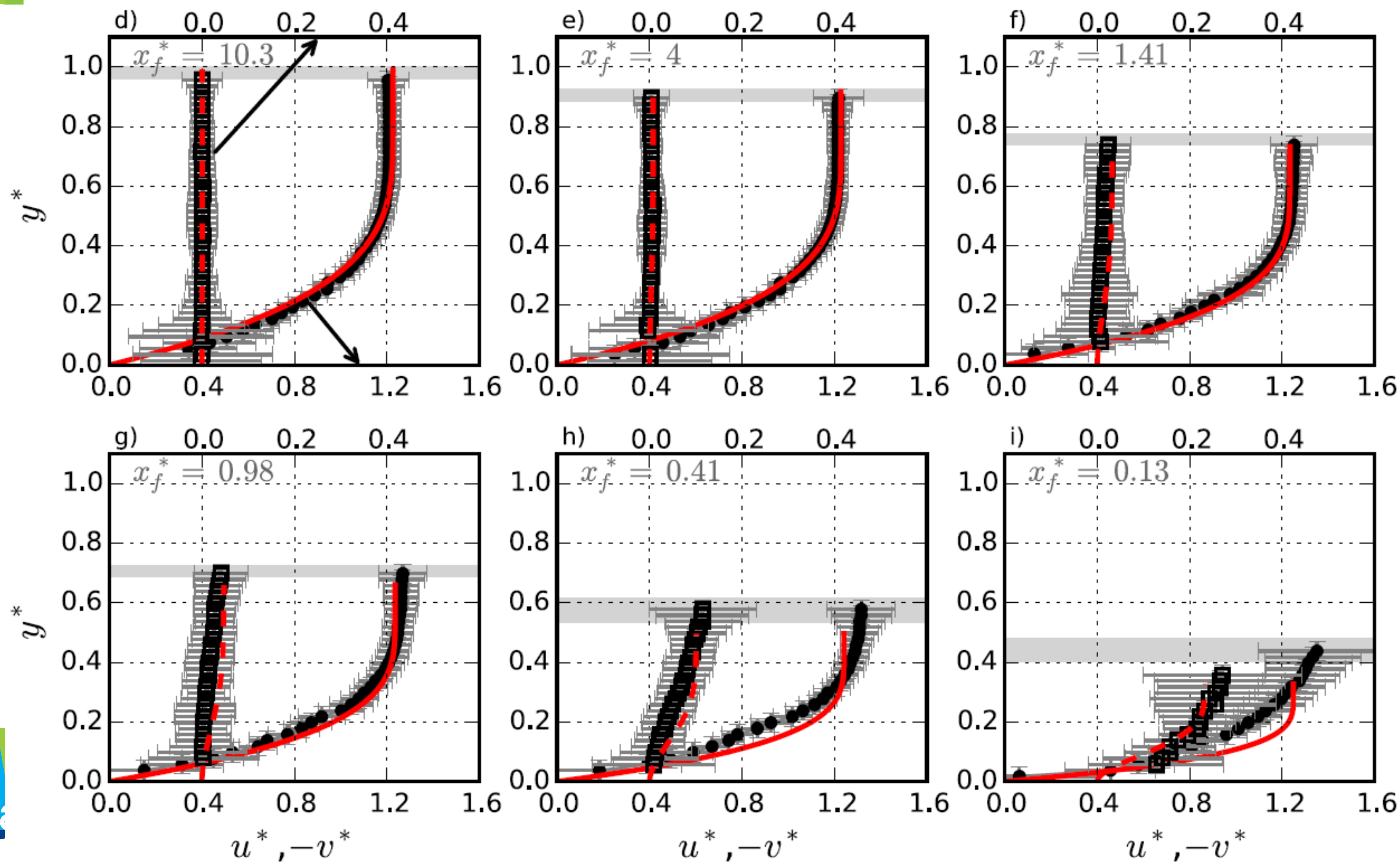


- Plug effectif disparaît au front

Confrontation modèle – expés: ordre 0

Profils de vitesse

$\theta = 15{,}3°; G = 0{,}35; Fr = 0{,}06$

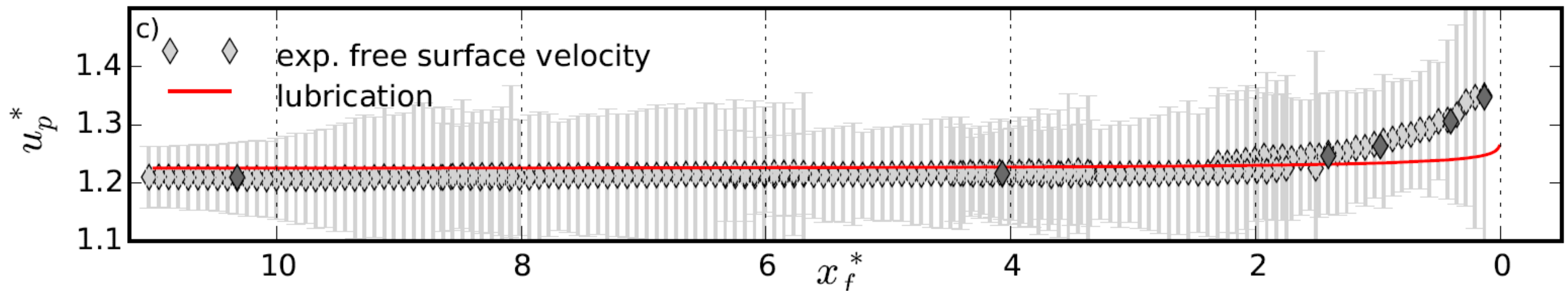


➢ Bon accord jusqu'à $x_f^* \approx 1$

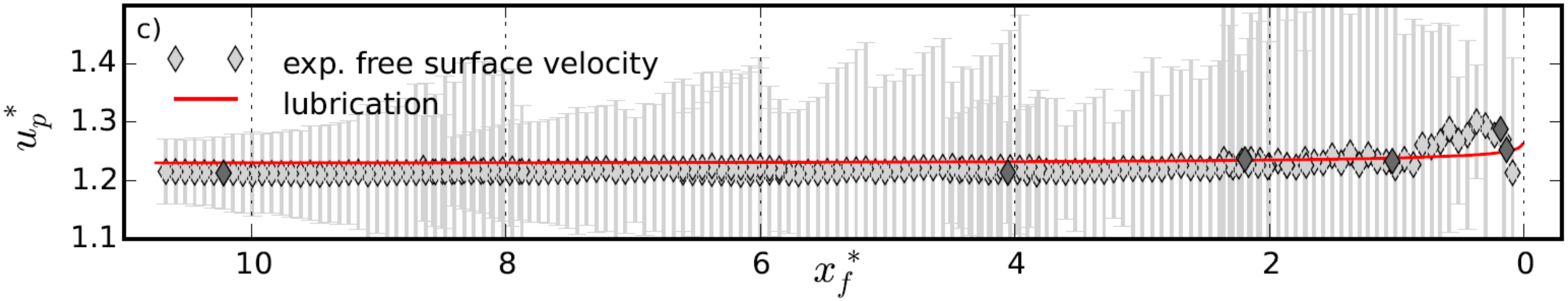
Confrontation modèle – expés: ordre 0

Vitesse de surface

$\theta = 15{,}3°; G = 0{,}35; Fr = 0{,}06$

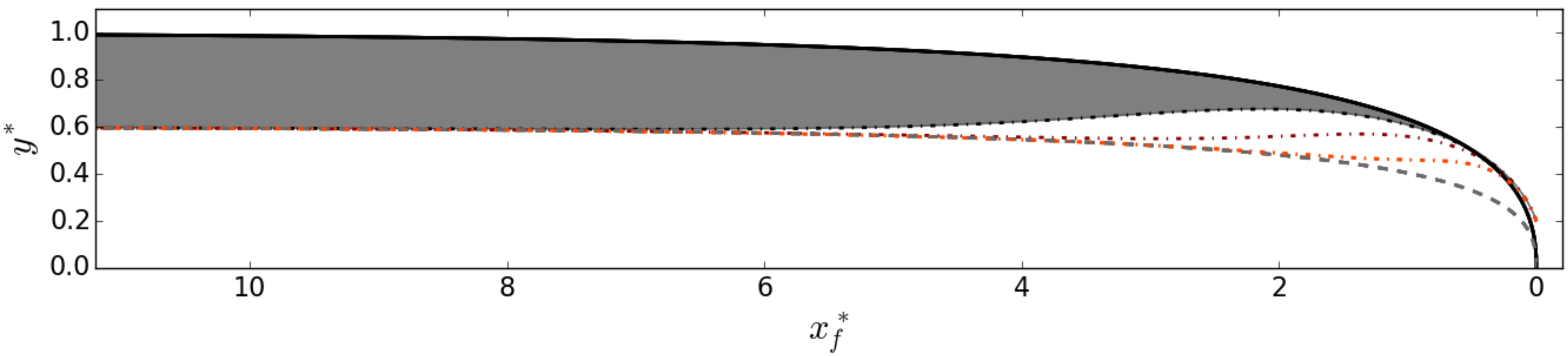


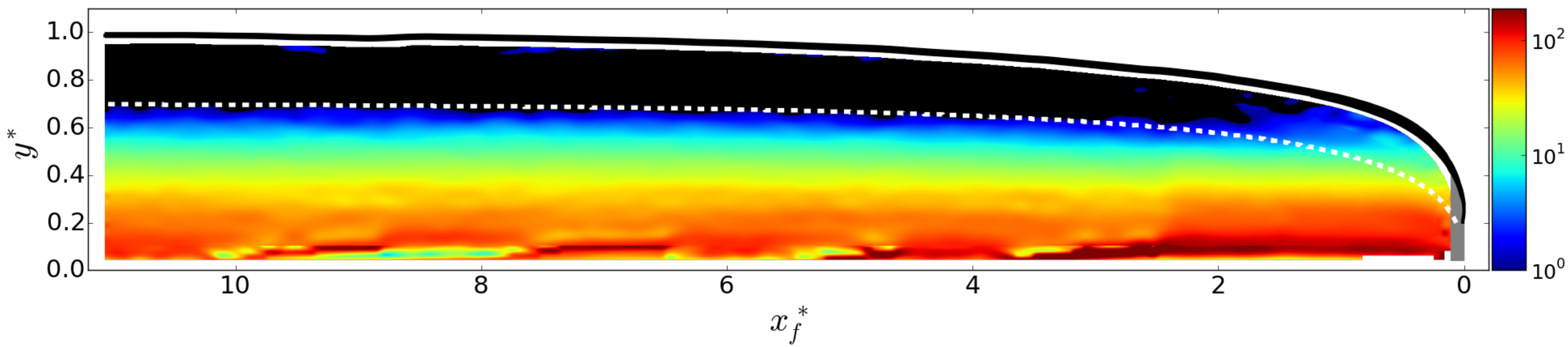
$\theta = 11{,}9°; G = 0{,}17; Fr = 0{,}38$



Confrontation modèle – expés: ordre 1

Plug



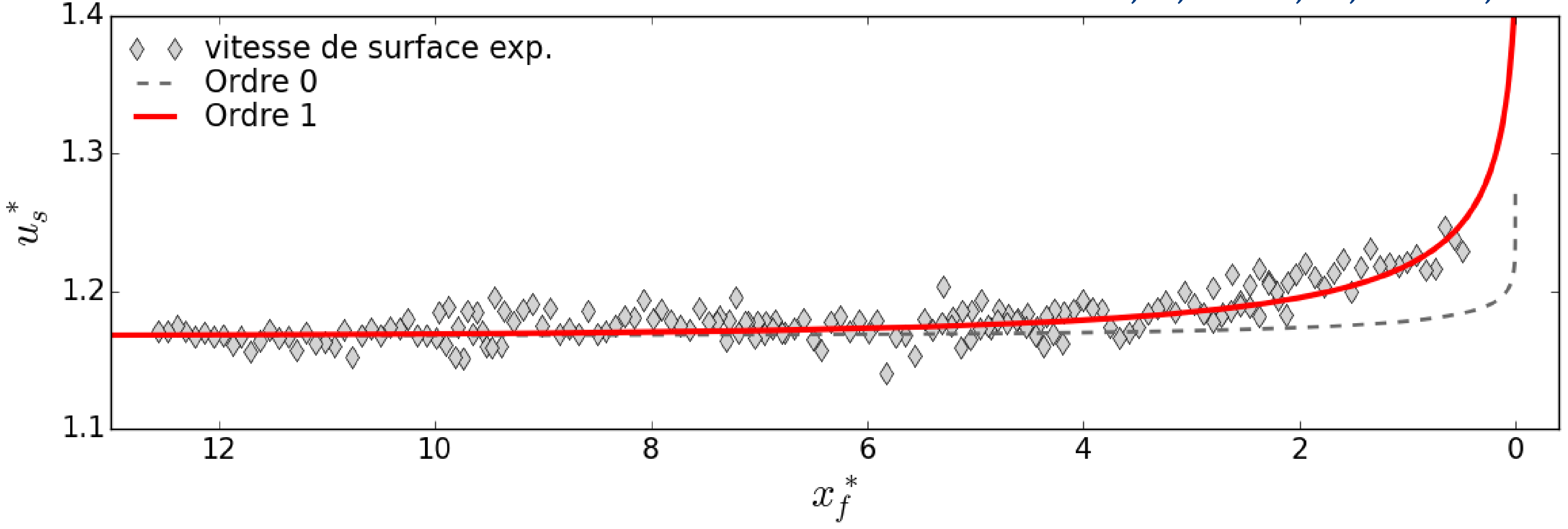


- ➢ Explique la disparition du plug au front

Confrontation modèle – expés: ordre 1

Vitesse de surface

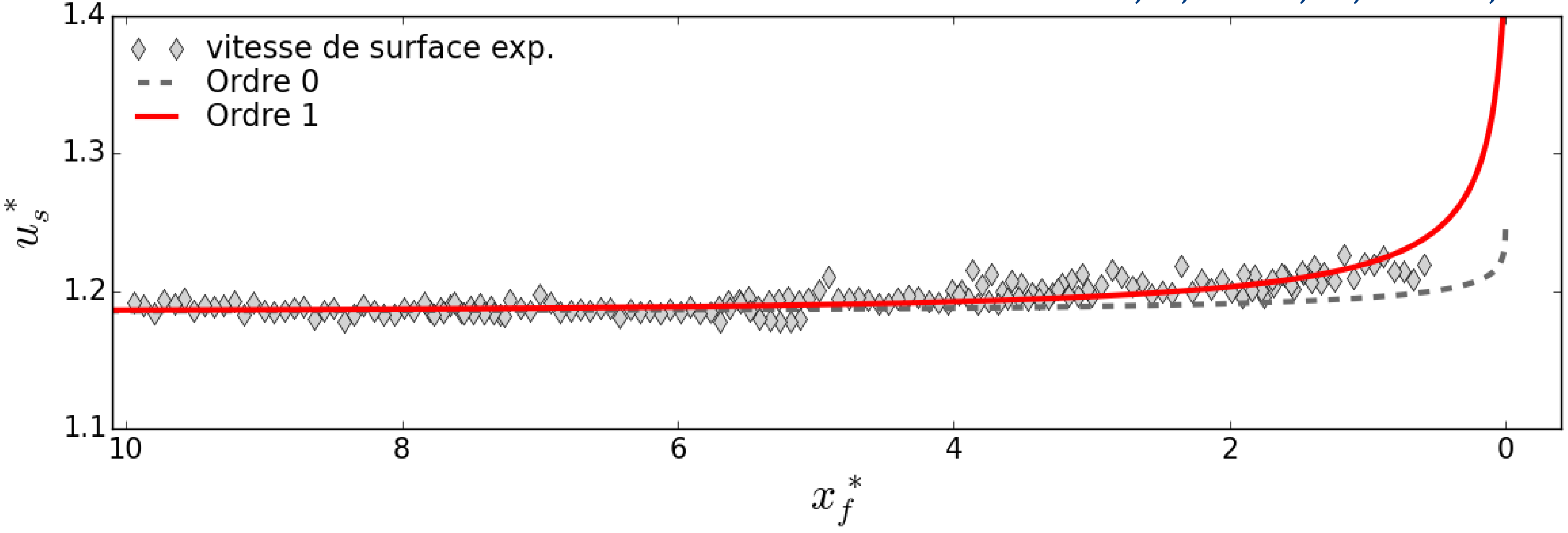
$\theta = 15{,}3°; G = 0{,}35; Fr = 0{,}06$



Confrontation modèle – expés: ordre 1

Vitesse de surface

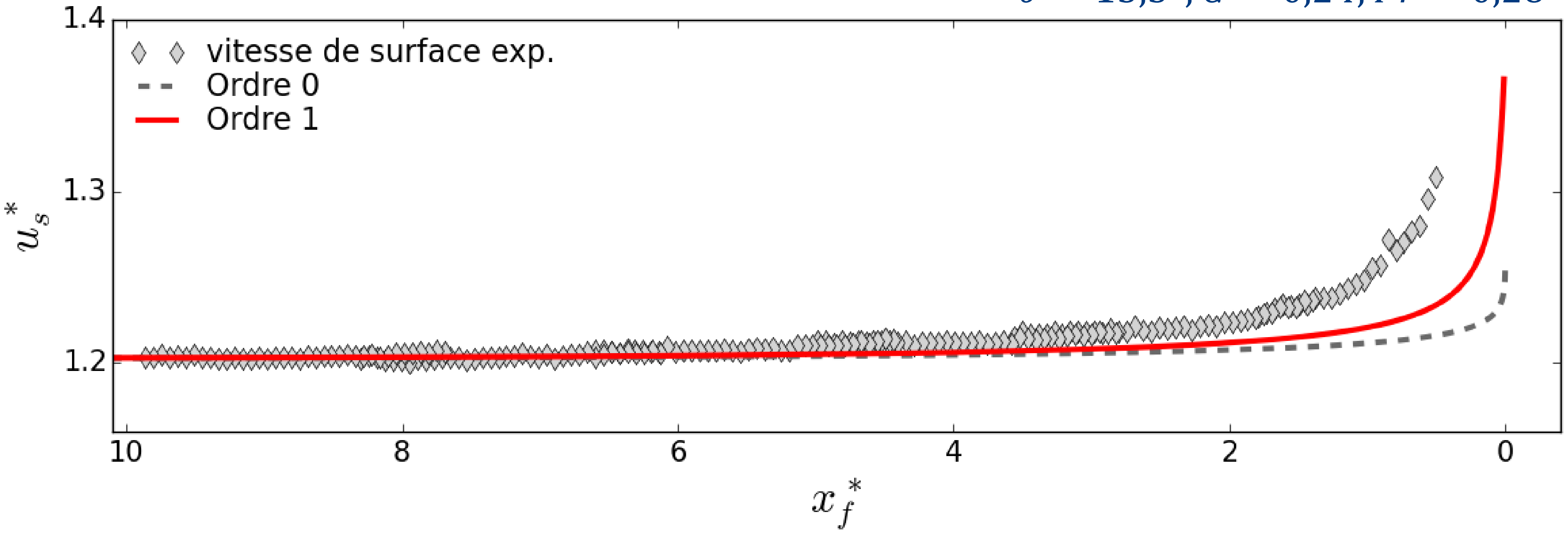
$\theta = 15{,}3°; G = 0{,}29; Fr = 0{,}13$



Confrontation modèle – expés: ordre 1

Vitesse de surface

$\theta = 15{,}3°; G = 0{,}24; Fr = 0{,}28$



- Accord au front amélioré, sauf pour les plus grands (θ, G, Fr)

Conclusions

- Mesure de profils de vitesse au front de coulées à surface libre
  - fluides Newtoniens et viscoplastiques
- Prédictions théoriques (développement asymptotique) des profils de vitesse dans le cas Herschel-Bulkley
- Modèle d'ordre 0 (lubrification) reproduit bien les données pour $x_f/H_N \gtrsim 1$
- Modèle d'ordre 1 améliore l'accord au voisinage du front
  - disparition du plug
  - bon accord quantitatif jusqu'à $\frac{x_f}{H_N} \approx 0{,}2$
- Différences ordre 0 – ordre 1 perceptibles uniquement dans le cas viscoplastique (rôle des contraintes normales)

irstea

Freydier, Chambon, Naaim, Experimental characterization of velocity fields within the front of viscoplastic surges down an incline, *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 2017.