

Modélisation mathématique des films minces

M. Chhay, D. Dutykh, M. Gisclon, C. Ruyer-Quil

Université Savoie Mont Blanc

LAMA UMR-5127- LOCIE UMR 5271

Cargèse- 30 mai 2017



LOCIE

- 1 Problématique
- 2 Modélisation
- 3 Construction
- 4 Perspectives
- 5 Références

- 1 Problématique
- 2 Modélisation
- 3 Construction
- 4 Perspectives
- 5 Références

Ecoulement de faible épaisseur sur une surface inclinée

- gravité
- pression hydrostatique
- tension de surface

⇒ instabilités hydrodynamiques

trains d'ondes interfaciales qui se déplacent le long de l'écoulement



Figure 1. Film d'eau ruisselant le long d'une rue en pente

Mécanismes de formation des écoulements de films liquides :

- effet de la gravité (vitres, trottoirs inclinés, pare-brise)
- condensation d'une vapeur
- impact des effets de bord

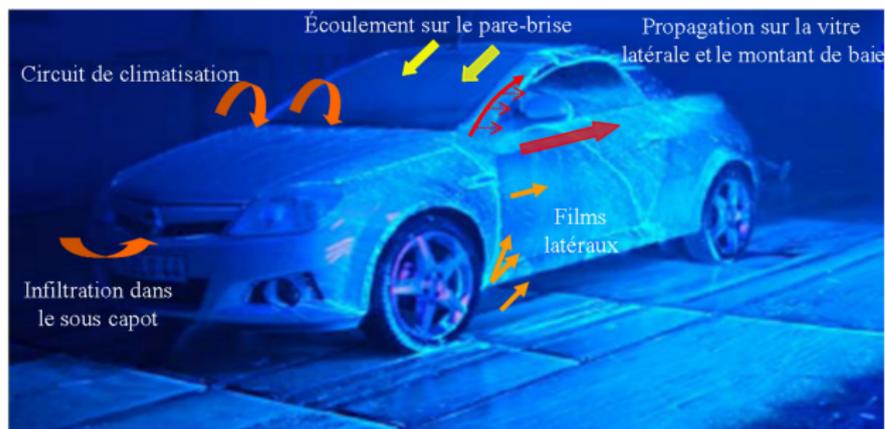
Les films liquides tombants sont au coeur des procédés industriels

- agro-alimentaire
- tour de refroidissement des centrales nucléaires

Les ondes à l'interface peuvent doubler l'intensité des transferts de chaleur et de masse

Films liquides tombants : phénomène hydrodynamique complexe

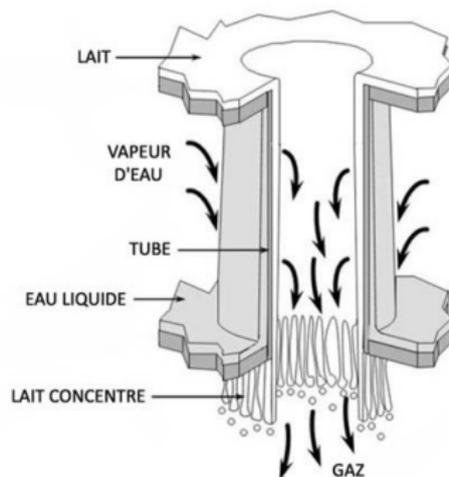
- industrie automobile



Exemple : climatisation

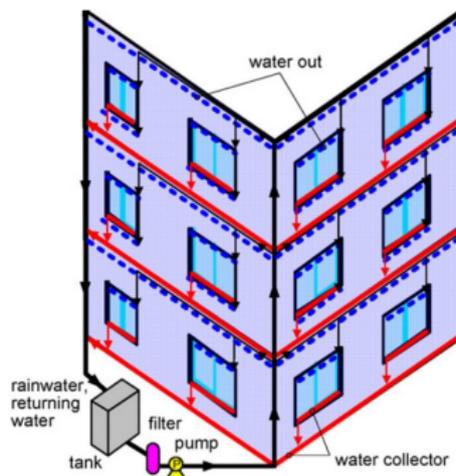
Évaporateurs à films tombants

- industrie agro-alimentaire



Le lait s'écoule sur les parois intérieures d'un tube vertical et s'évapore en partie sous l'effet de la chaleur apportée par de la vapeur d'eau présente à l'extérieur du tube. Le gaz s'évacue par le bas à l'intérieur du tube créant ainsi un écoulement co-courant tandis que de l'eau liquide se forme par condensation sur les parois extérieures.

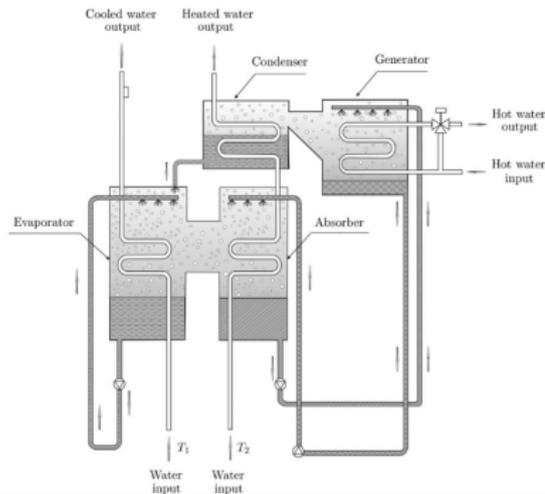
Applications importantes pour l'habitat



- rafraîchissement des ambiances
- valorisation de sources énergétiques
- stockage pluri-journalier, inter-saisonnier
- consommations électriques sensiblement plus faibles

Exemples : bâtiments de demain, serres

Contexte : optimisation des machines à absorption



 Vapor

 Water

 Diluted LiBr solution

 Concentrated LiBr solution

- **LiBr** : solution saline de bromure de lithium
⇒ bonnes capacités d'absorption, bons rendements thermiques
- **Objectif** : adaptées à l'habitat, employées comme échangeur thermodynamique de petite puissance couplée au solaire thermique pour le chauffage ou la réfrigération de l'habitat

- Film liquide = une fine couche de liquide s'écoulant sur une paroi
- Paroi = une plaque chauffée

⇒ équations de Navier–Stokes incompressibles en prenant en compte la faible épaisseur de l'écoulement

- effets d'échange de chaleur avec l'air ambiant
- rôle des instabilités de surface

- intensification des transferts couplés de **masse et de chaleur**

⇒ compréhension couplage hydro + transferts dans les films minces

⇒ modèle mathématique approché incluant la partie thermique

⇒ résolution numérique

⇒ réductions de la taille et du coût des machines

Etude des écoulements

- approche phénoménologique basée sur l'expérimentation
- approche de modélisation et simulation mettant en oeuvre des modèles de type Saint-Venant visqueux
- application à l'ingénierie visant à développer des outils de dimensionnement

Progression scientifique

- film d'eau sur une surface avec chauffage
- film eau/LiBr avec transferts de masse et de chaleur
- dynamique organisée autour d'ondes de surface

Modélisation des films liquides : méthode

- aux résidus pondérés (C. Ruyer-Quil, P. Manneville)
- asymptotique
- modélisation “à la Saint-Venant” autour du paramètre de film (épaisseur/longueur caractéristique)

⇒ modèles fiables et quantitatifs

⇒ simulations numériques

- pour des domaines étendus
- à des coûts acceptables

Plan

- 1 Problématique
- 2 Modélisation**
- 3 Construction
- 4 Perspectives
- 5 Références

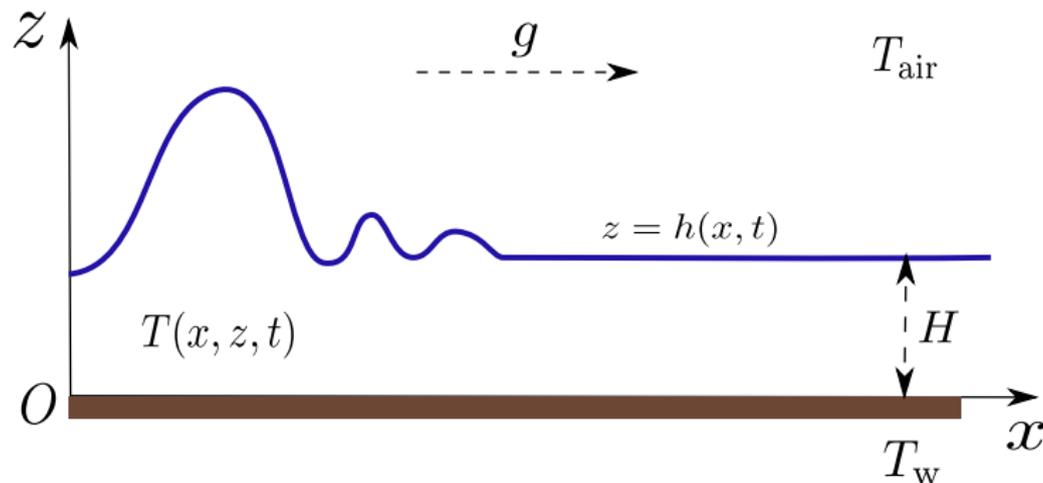


FIGURE: Le domaine 2D

Le liquide coule sur une plaque verticale ($z = 0$) chauffée
 h = hauteur de la surface libre

$$\Omega_t = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < z < h(x, t)\}$$

Equations de Navier-Stokes **incompressibles**

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \operatorname{div}(\nu \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{g}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

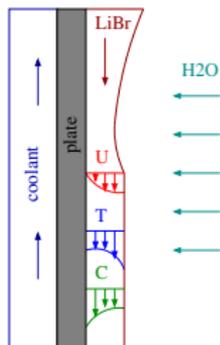
$\mathbf{u} = (u, w)$: champ de vitesse

p : pression

ρ : densité du fluide constante

ν : viscosité cinématique du fluide

\mathbf{g} : gravité constante



$T = T(x, z, t)$
champ de température

$C = C(x, z, t)$
concentration d'absorbant

Equation de Fourier $\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \text{div}(\alpha \nabla T)$
 α : coefficient de diffusion thermique

Equation de Fick $\partial_t C + \mathbf{u} \cdot \nabla C = \text{div}(D_C \nabla C)$
 D_C : coefficient de diffusion massique

$\alpha/D_C = \text{Sc}/\text{Pr} = \text{nombre de Lewis}$

Condition de non glissement sur le mur : $\mathbf{u}|_{z=0} = 0$

Condition d'imperméabilité (évolution de la hauteur du fluide)

$$\partial_t h + u|_{z=h} \partial_x h = w|_{z=h}$$

Continuité des contraintes tangentielles

$$\begin{aligned} (1 - (\partial_x h)^2) (\partial_z u|_{z=h} + \partial_x w|_{z=h}) &= 4 \partial_x h \partial_x u|_{z=h} \\ \rho|_{z=h} + \kappa \frac{\partial_{xx}^2 h}{(1 + (\partial_x h)^2)^{3/2}} &= -2\nu \frac{1 + (\partial_x h)^2}{1 - (\partial_x h)^2} \partial_x u|_{z=h} \end{aligned}$$

Effets de capillarité : $\kappa = \frac{\sigma}{\rho}$, σ tension de surface

ν : viscosité cinématique du fluide

Dirichlet : température fixée sur le mur

$$T|_{z=0} = T_w$$

Transfert de chaleur à la surface libre

$$-\lambda (\nabla T \cdot \mathbf{n})|_{z=h} = h(T|_{z=h} - T_{\text{air}})$$

T_{air} : température ambiante

h : coefficient d'échange thermique

λ : coefficient de conduction associée à la nature du liquide

\mathbf{n} : normale extérieure unitaire

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x h)^2}} \begin{pmatrix} -\partial_x h \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conditions avec concentration à l'interface

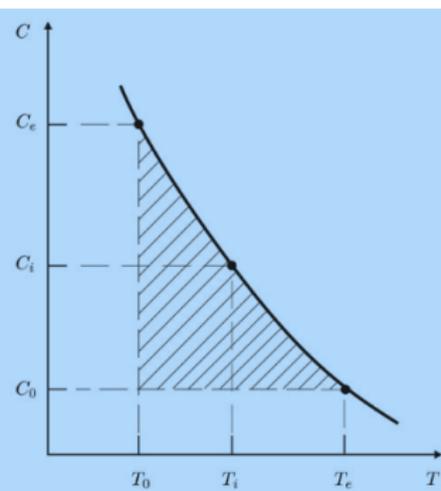


Fig. 1.2. A typical diagram of equilibrium ($P = \text{const}$).

- A l'équilibre pour T , on a C homogène $C = f(T, P)$
- on chauffe la paroi, par conduction, T change à l'interface
⇒ gradient de masse

$$\partial_n T = \text{Cste} \frac{1}{1 - C} \partial_n C$$

Approximation “eau peu profonde”

- La notion de film mince est relative et dépend de la longueur caractéristique considérée.
Les ondes ont une longueur bien plus grande que l'épaisseur du film
- $H \ll hL$: échelles de longueurs caractéristiques $\varepsilon = \frac{H}{L} \ll 1$
- $U_0 = \frac{g H^2}{2\nu}$: vitesse moyenne typique
→ solution de Nusselt hydrodynamique

Nombre sans dimension pour les équations

- $Re = \frac{U_0 H}{\nu}$: rapport entre les forces motrices de l'écoulement
Re petit : écoulement visqueux, Re grand : écoulement turbulent



Reynolds (1842 – 1912)



Péclet (1793 – 1857)

- $Pe = \frac{U_0 H}{\alpha}$: rapport entre les mécanismes de transports
Pe petit : transport diffusif, Pe grand : transport advectif



Weber (1864 – 1920)



Biot (1774 – 1862)

- $We = \frac{\kappa}{g H^2}$: rapport entre les forces interfaciales du fluide (tension de surface et inertie du fluide)
- $Bi = \frac{\eta H}{\lambda}$ rapport entre les mécanismes de transfert de chaleur
Bi petit transfert conductif, sinon convectif

Variables rescalées :

$$t = \bar{t} \frac{L}{U_0}, \quad x = \bar{x} L, \quad z = \bar{z} H, \quad h = \bar{h} H,$$

$$u = \bar{u} U_0, \quad w = \bar{w} U_0 \frac{H}{L}, \quad T = \bar{T} (T_w - T_{air}) + T_{air}, \quad p = g H \bar{p}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + u \partial_x u + w \partial_z u + \frac{2}{\text{Re}} \partial_x p = \frac{2}{\varepsilon \text{Re}} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} (\varepsilon \partial_{xx}^2 u + \partial_{zz}^2 u) \\ \partial_t w + u \partial_x w + w \partial_z w + \frac{2}{\varepsilon^2 \text{Re}} \partial_z p = \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} (\varepsilon^2 \partial_{xx}^2 w + \partial_{zz}^2 w) \\ \partial_x u + \partial_z w = 0 \\ \varepsilon \text{Pe} (\partial_t T + u \partial_x T + w \partial_z T) = \varepsilon^2 \partial_{xx}^2 T + \partial_{zz}^2 T \end{array} \right.$$

Les conditions au bord adimensionnées

Condition de non glissement sur le mur } inchangées
Condition cinématique à la surface libre }

Continuité à la surface libre :

$$\partial_z u|_{z=h} + \varepsilon^2 \partial_x w|_{z=h} = -4\varepsilon^2 \frac{\partial_x h}{1 - \varepsilon^2 (\partial_x h)^2} \partial_z w|_{z=h}$$
$$p|_{z=h} + \varepsilon^2 \text{We} \frac{\partial_{xx}^2 h}{(1 + \varepsilon^2 (\partial_x h)^2)^{3/2}} = -\varepsilon \frac{1 + \varepsilon^2 (\partial_x h)^2}{1 - \varepsilon^2 (\partial_x h)^2} \partial_x u|_{z=h}$$

Transfert de chaleur entre le liquide chauffé et l'air ambiant :

$$\partial_z T|_{z=h} = -\sqrt{1 + \varepsilon^2 (\partial_x h)^2} \text{Bi} p|_{z=h} + \varepsilon^2 \partial_x h \partial_x T|_{z=h}$$

Condition de Dirichlet au mur :

$$T|_{z=0} = 1$$

Plan

- 1 Problématique
- 2 Modélisation
- 3 Construction**
- 4 Perspectives
- 5 Références

La composante longitudinale de la vitesse

$$\begin{cases} u = u^0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \partial_t u + u \partial_x u + w \partial_z u + \frac{2}{\text{Re}} \partial_x p = \frac{2}{\varepsilon \text{Re}} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} (\varepsilon^2 \partial_{xx}^2 u + \partial_{zz}^2 u) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_{zz}^2 u^0 = -2}$$

$$\begin{cases} \partial_{zz}^2 u^0 = -2 \\ \mathbf{u}|_{z=0} = 0 \\ \partial_z u|_{z=h} + \varepsilon^2 \partial_x w|_{z=h} = -4 \varepsilon^2 \frac{\partial_x h}{1 - \varepsilon^2 (\partial_x h)^2} \partial_z w|_{z=h} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \partial_z u^0 = -z^2 + cz$$

Dans la suite, nous posons

$$B = \sqrt{1 + (\varepsilon \partial_x h)^2} \text{Bi} = \mathcal{O}(\text{Bi})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_z u^0 = -z^2 + cz \\ \partial_z u|_{z=h} + \varepsilon^2 \partial_x w|_{z=h} = -4\varepsilon^2 \frac{\partial_x h}{1 - \varepsilon^2 (\partial_x h)^2} \partial_z w|_{z=h} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{u^0(x, z, t) = -z^2 + 2zh(x, t)}$$

Le profil de vitesse de type Nusselt est parabolique

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x u + \partial_z w = 0 \\ w(z=0) = 0 \\ u = u^0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ u^0(x, z, t) = 2z h(x, t) - z^2 \\ w = w^0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{w^0(x, z, t) = -z^2 \partial_x h(x, t)}$$

La dérivation formelle du modèle

Développement asymptotique des variables par rapport à ε :

$$\begin{cases} u = u^0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ w = w^0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^0(x, z, t) = 2z h(x, t) - z^2 \\ w^0(x, z, t) = -z^2 \partial_x h(x, t) \end{cases}$$

$$\boxed{\partial_t h + u|_{z=h} \partial_x h = w|_{z=h}}$$

$$\begin{cases} \bar{u}(x, t) = \frac{1}{h} \int_0^h u^0(x, y, t) dy = \frac{2}{3} h^2(x, t) \\ v(x, t) = \frac{1}{h} \int_0^h u(x, y, t) dy = \frac{2}{3} h^2 + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{cases}$$

$$\boxed{\partial_t h + \partial_x(hv) = 0}$$

Développement asymptotique de la température

Développement asymptotique par rapport à ε de T

$$T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \varepsilon^2 T^{(2)} + \dots + \varepsilon^n T^{(n)} + \mathcal{O}(\varepsilon^{n+1})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \text{Pe} (\partial_t T + u \partial_x T + w \partial_z T) = \varepsilon^2 \partial_{xx}^2 T + \partial_{zz}^2 T \\ T|_{z=0} = 1 \\ \partial_z T|_{z=h} = -\sqrt{1 + \varepsilon^2 (\partial_x h)^2} \text{Bi} T|_{z=h} + \varepsilon^2 \partial_x h \partial_x T|_{z=0} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \partial_{zz}^2 T^{(0)} = 0 \\ T^{(0)}|_{z=0} = 1 \\ ? \end{array} \right.$$

Dans la suite, nous posons

$$\mathcal{B} = \sqrt{1 + (\varepsilon \partial_x h)^2} \text{Bi} = \mathcal{O}(\text{Bi})$$

Solution Nusselt = terme du premier ordre

$$T^{(0)}(x, z, t) = 1 - A(x, t) z \quad \text{avec} \quad A(x, t) = \frac{\mathcal{B}}{1 + h(x, t)\mathcal{B}}$$

- influence des instabilités hydrodynamiques
- travelling waves peuvent apparaître

La solution moyenne de Nusselt

$$\bar{T}^{(0)} = \frac{1}{h} \int_0^h T^{(0)} dz = 1 - \frac{A(x,t)h}{2} = 1 - \frac{h}{2} \frac{B}{1+hB}$$

est consistante avec les cas limites de transfert de chaleur.

Cas adiabatique : $Bi \rightarrow 0$, $B \rightarrow 0$, $A \rightarrow 0$,

$\bar{T}^{(0)} \rightarrow 1$: température uniforme atteint

Pas de résistance : $Bi \rightarrow \infty$, $Bi \rightarrow \infty$, $A \rightarrow \frac{1}{h}$,

$\bar{T}^{(0)} \rightarrow \frac{1}{2}$: gradient de température uniforme

$$\bar{T} = \frac{1}{h} \int_0^h T dz$$

- Intégration de l'équation sur la température par rapport à z

$$\varepsilon \text{Pe} (\partial_t T + u \partial_x T + w \partial_z T) = \varepsilon^2 \partial_{xx}^2 T + \partial_{zz}^2 T$$

- Utilisation des conditions aux limites
- Il reste à calculer $\partial_z T|_{z=0}$ en fonction de \bar{T}
- Fermeture

Système à surface libre conservatif

La dérivation formelle du modèle avec $\mathcal{U} = (h, h v, h \bar{T})$ donne un système conservatif

$$\partial_t \mathcal{U} + \partial_x \mathcal{F} = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{N} + \mathcal{S}$$

avec

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} h v \\ h v^2 + \frac{8}{225} h^5 \\ h v \bar{T} \end{pmatrix} \quad \mathcal{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\text{Re}} \left(2h - \frac{3v}{h} \right) \\ \mathcal{N}_3 \end{pmatrix} \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{We} h h_{xxx} \\ \mathcal{S}_3 \end{pmatrix}$$

Système à surface libre hyperbolique

La dérivation formelle du modèle donne un système hyperbolique

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} h \\ hv \\ h\bar{T} \end{pmatrix} \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} hv \\ hv^2 + \frac{8}{225}h^5 \\ hv\bar{T} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -v^2 + \frac{8}{45}h^4 & 2v & 0 \\ v\bar{T} & \bar{T} & v \end{pmatrix}$$

$$\lambda_0 = v, \quad \lambda_{\pm} = v \pm \frac{2}{15}\sqrt{10}h^2$$

- 1 Problématique
- 2 Modélisation
- 3 Construction
- 4 Perspectives**
- 5 Références

- Le terme $\varepsilon \partial_x h$ est difficile à estimer
Hypothèse : $\varepsilon \partial_x h = \mathcal{O}(\varepsilon) \Rightarrow \sqrt{1 + (\varepsilon \partial_x h)^2} \text{ Bi} = \mathcal{O}(\text{Bi})$
- Justification rigoureuse
- Conditions aux limites mélangées

$$\partial_z T|_{z=0} = \text{Bi}^w(x) (T|_{z=0} - 1) + \psi(x)$$

quand $\text{Bi}^w \rightarrow 0$ alors Neumann $\partial_z T|_{z=0} = \psi(x)$

quand $\text{Bi}^w \rightarrow \infty$ alors Dirichlet $T|_{z=0} = 1$

- Paroi ondulée et poreuse
- L'absorption s'accompagne par ailleurs de modifications sensibles des propriétés physiques du liquide en terme de viscosité, de densité et de tension superficielle
 \Rightarrow couplages forts avec la dynamique des films

- 1 Problématique
- 2 Modélisation
- 3 Construction
- 4 Perspectives
- 5 Références**

- 1 M. BOUTOUNET
Modèles asymptotiques pour la dynamique d'un film liquide mince
Thèse de l'Université de Toulouse, 2013
- 2 D. BRESCH, P. NOBLE
Mathematical justification of a shallow water model,
Methods Appl. Anal., 2007
- 3 M. CHHAY, D. DUTYKH, M. GISCLON, C. RUYER-QUIL
New asymptotic heat transfer model in thin liquid films
Applied Mathematical Modelling 2017
- 4 V.-E. NAKORYAKOV, N.-I. GRIGORYEVA
Nonisothermal Absorption in Thermotransformers
Journal of Engineering Thermophysics, 2010
- 5 C. RUYER-QUIL, N. KOFMAN, D. CHASSEUR, S. MERGUI
Dynamics of falling liquid films
Eur. Phys. J. E, 2014