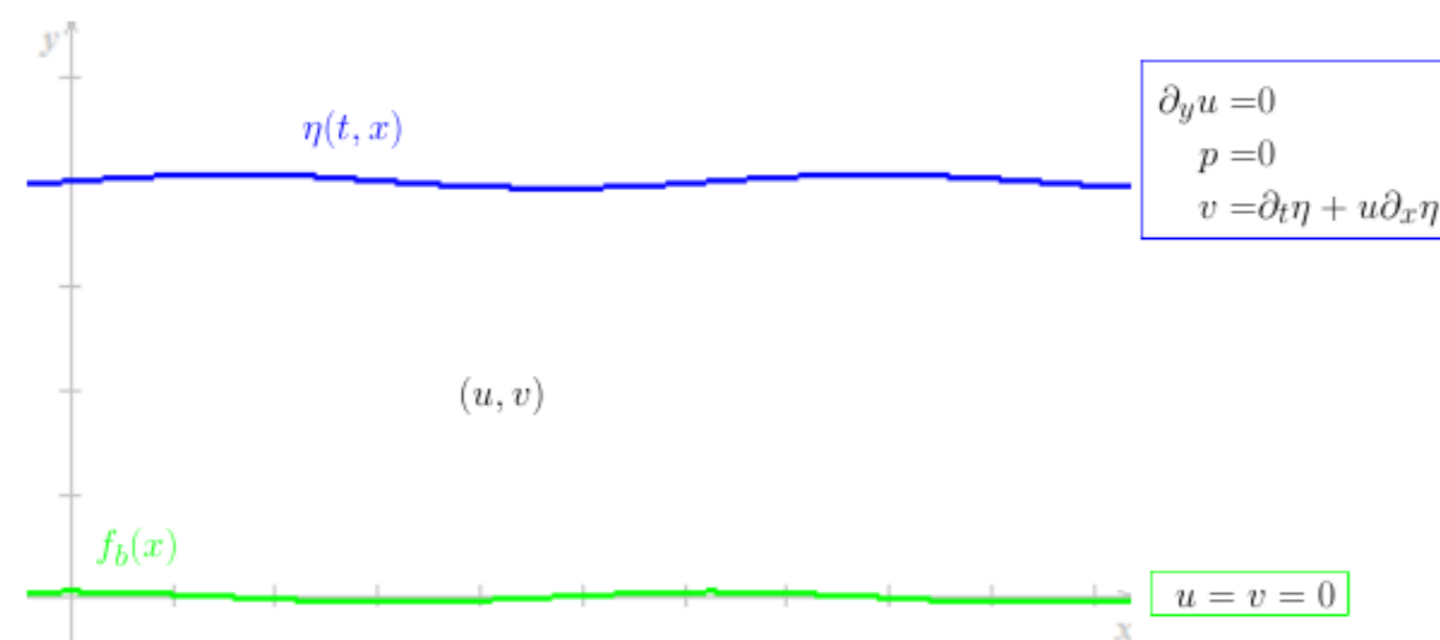


Mathilde Legrand, sous la direction de François James

Équations pour l'écoulement 2D

Cadre d'étude.

On considère un fluide à surface libre en régime laminaire. Le comportement du fluide est entièrement décrit par les équations de Navier-Stokes qui sont cependant difficilement exploitables dans leur intégralité.



Domaine d'étude et conditions aux limites

Deux nombres caractérisant l'écoulement :

$$\begin{cases} Re_h = \frac{u_0 h_0}{\nu} : \text{nombre de Reynolds, rapport entre les forces d'inertie et de viscosité} \\ Fr = \frac{u_0}{\sqrt{g h_0}} : \text{nombre de Froude, rapport entre les forces liées à la vitesse et la force de pesanteur.} \end{cases}$$

Hypothèses d'étude :

- Faible hauteur d'eau par rapport à la longueur du domaine.
- Eau \Rightarrow grand nombre de Reynolds Re_h .

Équations de Navier-Stokes adimensionnées :

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{x}} \bar{u} + \partial_{\bar{y}} \bar{v} &= 0 \\ \partial_{\bar{t}} \bar{u} + \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{u} + \bar{v} \partial_{\bar{y}} \bar{u} &= -\partial_{\bar{x}} \bar{p} + \frac{1}{Re_h} \Delta \bar{u} \\ \partial_{\bar{t}} \bar{v} + \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{v} + \bar{v} \partial_{\bar{y}} \bar{v} &= -\partial_{\bar{y}} \bar{p} - \frac{1}{Fr^2} + \frac{1}{Re_h} \Delta \bar{v} \end{aligned}$$

L'omission des termes en $\frac{1}{Re_h}$ donne les équations d'Euler.

Scaling Ondes longues

On introduit $\varepsilon = \frac{h_0}{L} \ll 1$ le rapport entre la hauteur et longueur caractéristiques de l'étude. Ondes longues : $\bar{v} = \varepsilon \tilde{v}$, $\bar{u} = u$, $\bar{x} = \frac{x}{\varepsilon}$, $\bar{y} = y$. Les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\partial_x u + \partial_y v = 0 \quad (1)$$

$$\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u = -\partial_x p + \frac{1}{\varepsilon Re_h} \partial_y^2 u \quad (2)$$

$$\partial_y p = -\frac{1}{Fr^2} \quad (3)$$

Conditions d'adhérence au fond et cinématique à la surface

Pas de viscosité selon l'horizontal + Pression hydrostatique avec (2)

Couche visqueuse couplée avec les équations d'Euler

Équations d'Euler \Rightarrow condition de glissement \Rightarrow **Couplage Euler + couche visqueuse** localisée au fond. On introduit un changement d'échelle pour la variable y à l'aide d'un petit paramètre $\bar{\delta} \ll 1$.

$$\begin{cases} x = \bar{x}, y = \bar{\delta} \bar{y} + f_b, t = \bar{t}, \\ u = \bar{u}, v = \bar{\delta} \bar{v} + f_b', p = \bar{p}. \end{cases}$$

La conservation du maximum de termes impose $\bar{\delta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon Re}}$, pour obtenir finalement les **équations de Prandtl** sur fond plat :

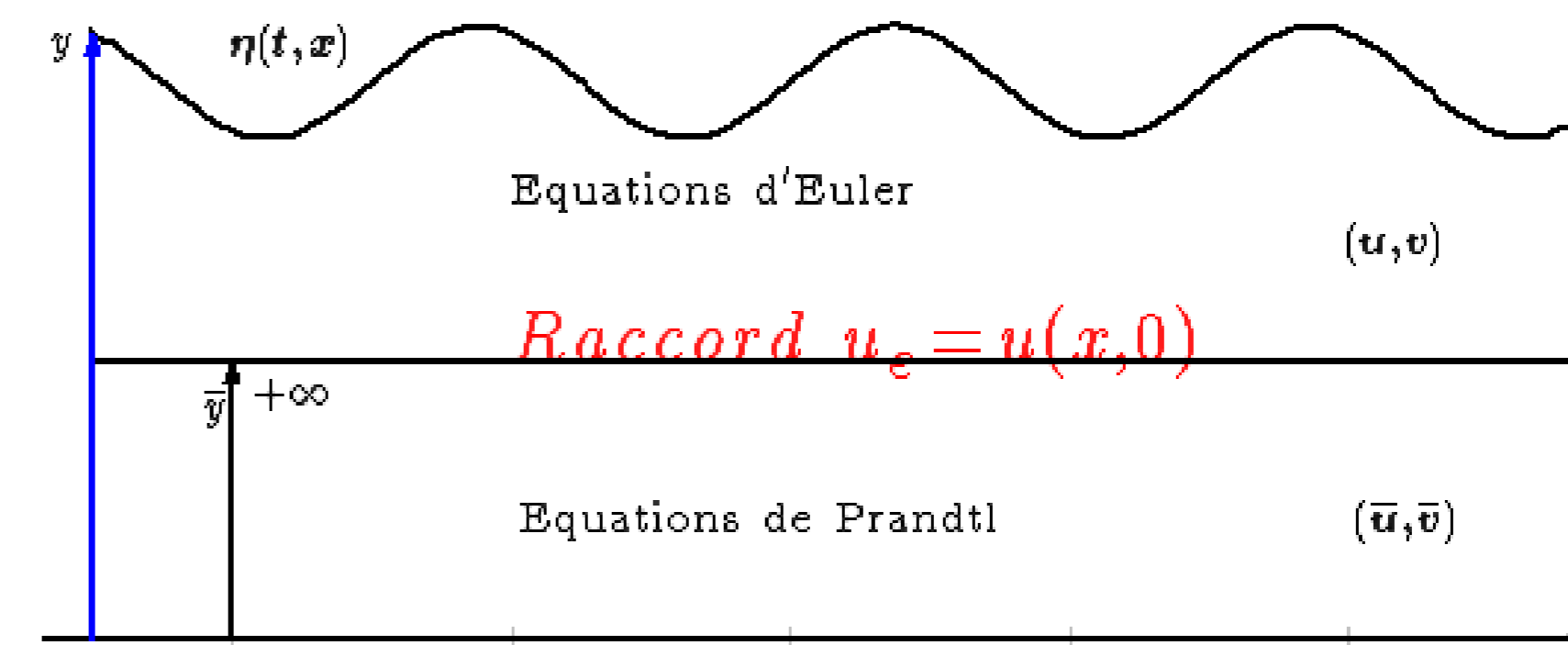
$$\begin{aligned} \partial_{\bar{x}} \bar{u} + \partial_{\bar{y}} \bar{v} &= 0 \\ \partial_{\bar{t}} \bar{u} + \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{u} + \bar{v} \partial_{\bar{y}} \bar{u} &= -\partial_{\bar{x}} \bar{p} + \partial_{\bar{y}}^2 \bar{u} \\ 0 &= \partial_{\bar{y}} \bar{p} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\bar{u} = \bar{v} = 0 \text{ en } \bar{y} = 0$$

Raccord avec Euler quand $\bar{y} \rightarrow +\infty$.

Le frottement écrit en variables globales est ainsi d'ordre $\bar{\delta}^2$.

Équations intégrées



Deux "niveaux" d'étude du fluide

Sur le même principe que les équations de Saint Venant, les équations de Navier-Stokes avec scaling Ondes Longues sont intégrées sur toute la hauteur d'eau. La localisation du frottement dans la couche visqueuse entraîne un frottement intégré d'ordre $\bar{\delta}$. Par conséquent la vitesse moyennée est approximée au même ordre.

Définition.

- $\delta_1 = \int_0^{+\infty} (1 - \frac{\bar{u}}{u_e}) d\bar{y}$ est appelé **épaisseur de déplacement**. $\bar{\delta} \delta_1$ exprime la distance fictive de laquelle le "fond" devrait être déplacé pour conserver le débit du fluide parfait.
- $h\bar{U} = \int_{f_b}^{\eta} u dy = hu_e - \bar{\delta} \delta_1 u_e + O(\bar{\delta}^2)$ est l'approximation de la vitesse moyennée. hu_e correspond à l'approximation faite pour un fluide parfait, elle est ici pondérée par un terme contenant la viscosité.

Système de Saint Venant étendu

L'équation (2) justifie la pression hydrostatique introduite dans le système complet. Celui-ci se décompose en deux parties :

- Les équations de conservation intégrées comme pour Saint Venant :

$$\partial_t h + \partial_x (h\bar{U}) = 0 \quad (5)$$

$$\partial_t (h\bar{U}) + \partial_x \left(h\bar{U}^2 + \frac{1}{2Fr^2} h^2 + \bar{U}^2 \bar{\delta} \delta_1 (1 - H^{-1}) \right) = -\frac{1}{Fr^2} f_b' h - \bar{\delta} \varphi'(0) \frac{u_e}{\delta_1} \quad (6)$$

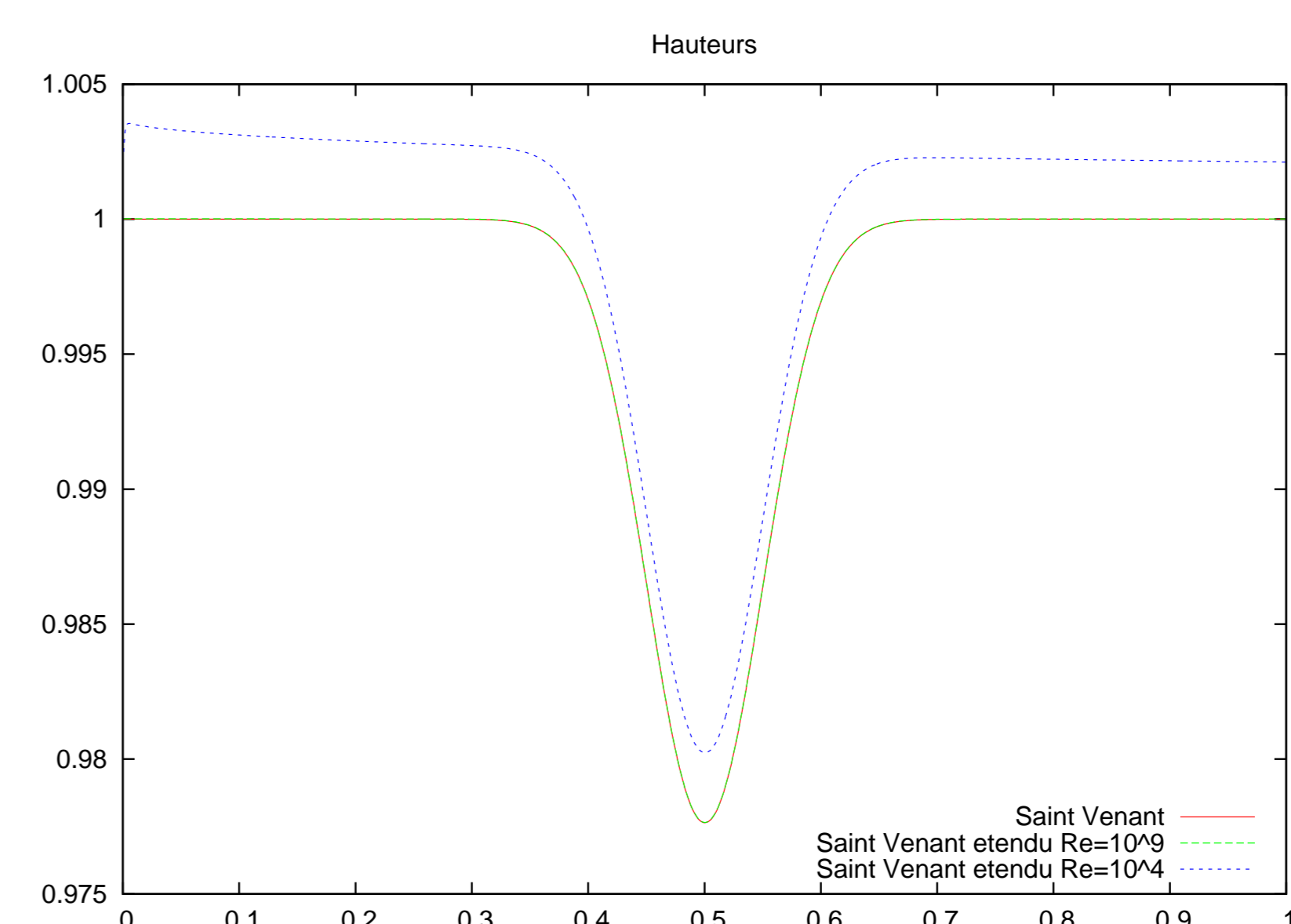
En prenant $\bar{\delta} = 0$, on retrouve les équations de Saint Venant sans frottement.

- Deux équations pilotant le frottement :

$$\partial_t (u_e \delta_1) + u_e \delta_1 \partial_x u_e + \partial_x (u_e^2 H^{-1} \delta_1) = \varphi'(0) \frac{u_e}{\delta_1} \quad (7)$$

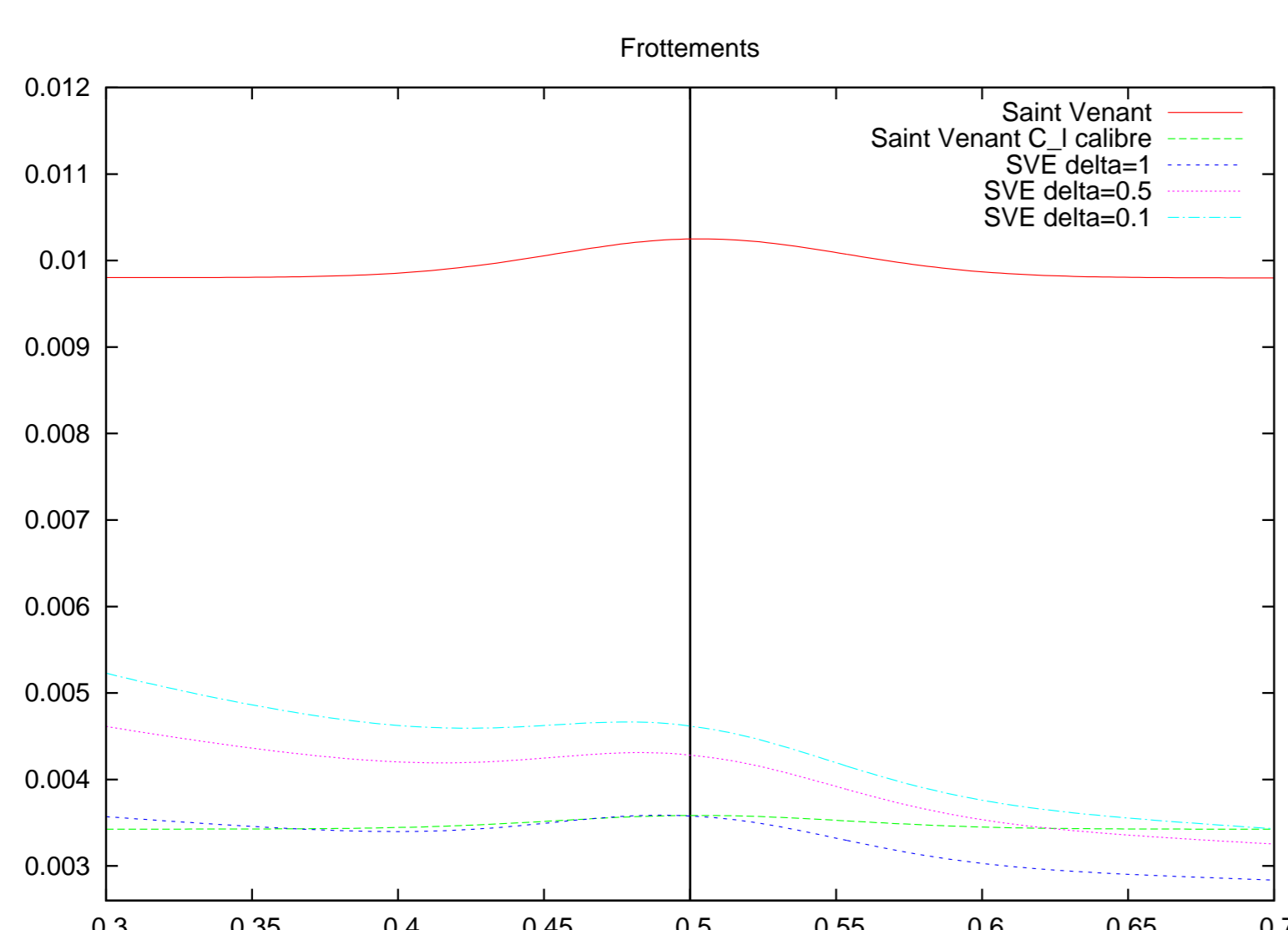
$$\partial_t u_e + u_e \partial_x u_e + \frac{1}{Fr^2} \partial_x h = -\frac{1}{Fr^2} f_b' \quad (8)$$

L'équation (7) est appelée **équation de Von Kármán**. Elle est obtenue en observant le défaut de vitesse ($u_e - \bar{u}$) au travers des équations (4) et (8). Elle n'a de sens que si $\bar{\delta} > 0$.



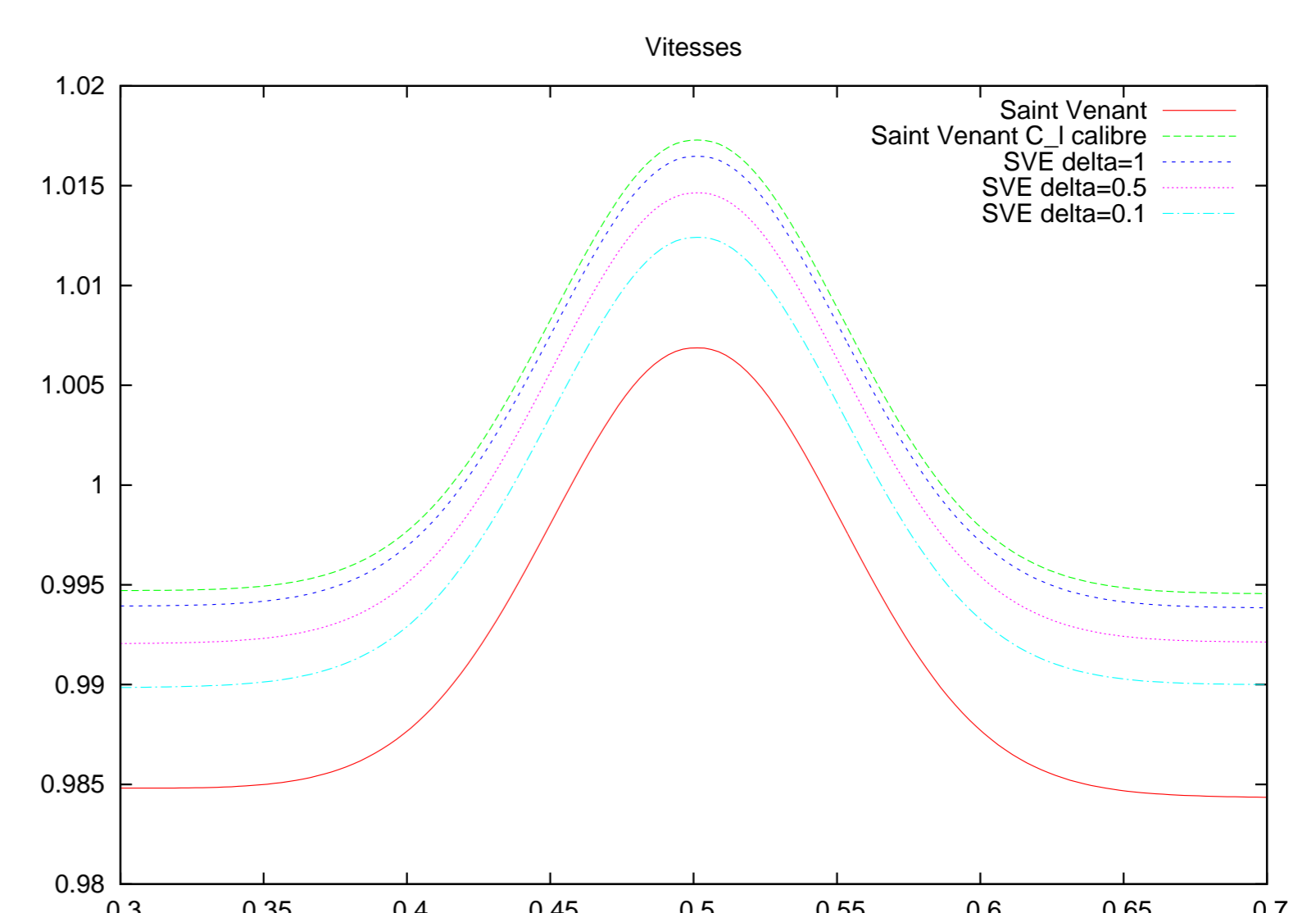
Comparaison code Saint Venant sans frottement et code Saint Venant étendu.

Comportement du frottement



Différentes entrées de δ_1 pour Saint Venant étendu ;
 $C_l = 0.00345$ pour Saint Venant calibré.

- $f_b(x) = \frac{1}{50} \exp\left(-\frac{(x-0.5)^2}{2(0.05)^2}\right)$
- Nombre de Reynolds : $Re = 10^4$
- Frottement laminaire pour Saint Venant : $\frac{1}{Re} \frac{U}{h}$ ou calibré avec $C_l \frac{U}{h}$
- Frottement $\bar{\delta} \frac{u_e}{\delta_1} \varphi'(0)$ pour Saint Venant étendu (SVE)



Différentes entrées de δ_1 pour Saint Venant étendu ;
 $C_l = 0.00345$ pour Saint Venant calibré.

Simulations effectuées à l'aide de flux Rusanov et d'un schéma de reconstruction hydrostatique pour les parties de type Saint Venant. Le coefficient C_l du frottement laminaire est réglé pour ajuster les maximums locaux des frottements du modèle de Saint Venant et de celui de Saint Venant étendu avec pour initialisation $\delta_1 = 1$. Le frottement du système de Saint Venant étendu atteint un maximum local avant le sommet de la bosse alors que le frottement laminaire classique de Saint Venant l'atteint au sommet. De plus un frottement de même ordre impose à la vitesse du modèle étendu de Saint Venant d'être plus faible que celle calculée par le modèle de Saint Venant.