

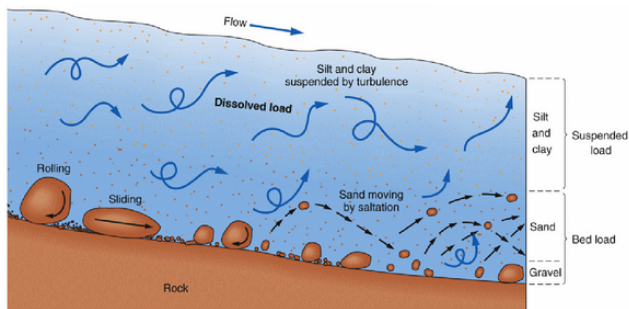
Erosion: quel modèle pour l'écoulement?

Minh-Hoang Le¹

¹MAPMO - Université d'Orléans

Première école EGRIN, 2 - 4 avril 2013

Transport de sédiments



- shear stress: $\tau_b = \rho_w u_*^2$, u_* : vitesse de frottement
- Shields stress: $\tau_b^* = \frac{\tau}{\Delta \rho g D_s}$, $\Delta \rho = \rho_s - \rho_w$
- condition de mise en mouvement: $\tau_b^* > \tau_c^* := f(Re_p)$, $Re_p = u_* D_s / \nu$

- adimensionnement du flux de sédiments

$$q_b^* = \frac{q_b}{(\Delta\rho g D_s^3 / \rho_w)^{1/2}},$$

- lois empiriques

- ▶ MPM (1948): $q_b^* = 8(\tau_b^* - \tau_{cr}^*)^{1.5}$
- ▶ Bagnold (1956): $q_b^* = 17(\tau_b^* - \tau_{cr}^*) [(\tau_b^*)^{0.5} - (\tau_{cr}^*)^{0.5}]$
- ▶ Nielsen (1992): $q_b^* = 12(\tau_b^*)^{0.5}(\tau_b^* - \tau_{cr}^*)$
- ▶ Camenen (2005): $q_b^* = 12(\tau_b^*)^{1.5} \exp\left(-4.5 \frac{\tau_{cr}^*}{\tau_b^*}\right)$
- ▶ etc.

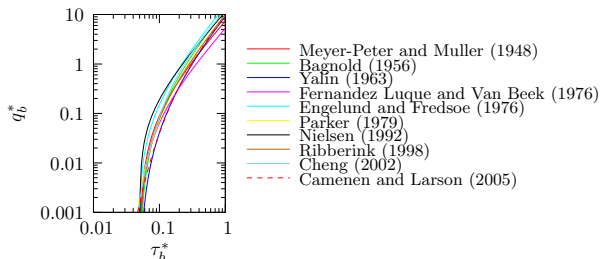
Bedload

- adimensionnement du flux de sédiments

$$q_b^* = \frac{q_b}{(\Delta\rho g D_s^3 / \rho_w)^{1/2}},$$

- lois empiriques

- ▶ MPM (1948): $q_b^* = 8(\tau_b^* - \tau_{cr}^*)^{1.5}$
- ▶ Bagnold (1956): $q_b^* = 17(\tau_b^* - \tau_{cr}^*) [(\tau_b^*)^{0.5} - (\tau_{cr}^*)^{0.5}]$
- ▶ Nielsen (1992): $q_b^* = 12(\tau_b^*)^{0.5}(\tau_b^* - \tau_{cr}^*)$
- ▶ Camenen (2005): $q_b^* = 12(\tau_b^*)^{1.5} \exp\left(-4.5 \frac{\tau_{cr}^*}{\tau_b^*}\right)$
- ▶ etc.



- adimensionnement du flux de sédiments

$$q_b^* = \frac{q_b}{(\Delta\rho g D_s^3 / \rho_w)^{1/2}},$$

- lois empiriques

- ▶ MPM (1948): $q_b^* = 8(\tau_b^* - \tau_{cr}^*)^{1.5}$
- ▶ Bagnold (1956): $q_b^* = 17(\tau_b^* - \tau_{cr}^*) [(\tau_b^*)^{0.5} - (\tau_{cr}^*)^{0.5}]$
- ▶ Nielsen (1992): $q_b^* = 12(\tau_b^*)^{0.5}(\tau_b^* - \tau_{cr}^*)$
- ▶ Camenen (2005): $q_b^* = 12(\tau_b^*)^{1.5} \exp\left(-4.5 \frac{\tau_{cr}^*}{\tau_b^*}\right)$
- ▶ etc.

- conservation de masse de sédiments (équation d'Exner)

$$\partial_t z_b + \partial_x q_b = 0$$

Quel modèle pour l'écoulement?

Approches de type St Venant

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0$$

$$\partial_t(hu) + \partial_x(hu^2) = -g\partial_x\eta - \frac{\tau_b}{\rho_w}$$

$$\partial_t z_b + \partial_x q_b = 0$$

où $h = \eta - z_b$, $q_b = q_b(\tau_b)$ et $\tau_b = \rho_w u_*^2 := f \rho_w u^2$

Approches de type St Venant

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0$$

$$\partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) + gh\partial_x z_b = 0$$

$$\partial_t z_b + \partial_x q_b = 0$$

$$\partial_t W + \mathbf{A}(W)\partial_x W = 0, \quad W = (h, hu, z_b)^T$$

$$p_A(\lambda) = - \underbrace{\lambda[(u - \lambda)^2 - gh]}_{f(\lambda)} + \underbrace{gh(b\lambda + a)}_{d(\lambda)}$$

$$\text{où } a = \partial_h q_b, \quad b = \partial_{hu} q_b.$$

Le système est toujours hyperbolique (puisque $\tau_b \sim u^2 \Rightarrow a = -ub$)
(Cordier et al, 2011)

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0$$

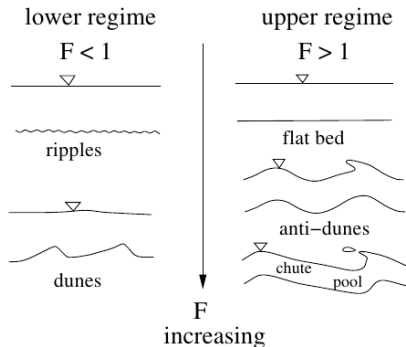
$$\partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = -gh\partial_x z_b - \frac{\tau_b}{\rho_w}$$

$$\partial_t z_b + \partial_x q_b = 0$$

plusieurs contributions, voici une liste non-exhaustive

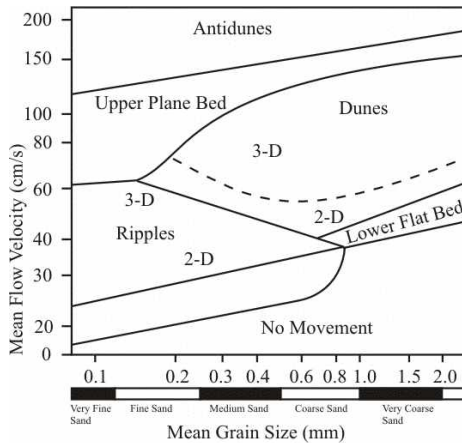
- Hudson (2001)
- Delis et al. (2008)
- Castro-Diaz et al. (2008)
- Benkhaldoun et al. (2009)
- Audusse et al. (2011)
- Siviglia et al. (2013)

Bedforms



(d'après Fowler)

Bedforms



Modified after Harms, Southard and Walker, 1982

Adimensionnement des équations

échelles:

$$h, z_b, \eta \sim h_0, \quad u \sim u_0, \quad q_b \sim q_0, \quad \tau_b \sim f \rho_w u_0$$
$$x \sim l_0, \quad t \sim \frac{h_0 l_0}{q_0}, \quad \varepsilon = \frac{q_0}{h_0 u_0}, \quad F = \frac{u_0}{\sqrt{g h_0}}$$

Adimensionnement des équations

échelles:

$$h, z_b, \eta \sim h_0, \quad u \sim u_0, \quad q_b \sim q_0, \quad \tau_b \sim f \rho_w u_0$$
$$x \sim l_0, \quad t \sim \frac{h_0 l_0}{q_0}, \quad \varepsilon = \frac{q_0}{h_0 u_0}, \quad F = \frac{u_0}{\sqrt{g h_0}}$$

équations adimensionnées

$$\varepsilon \partial_h + \partial_x (hu) = 0,$$

$$F^2 (\varepsilon \partial_t u + u \partial_x u) = -\partial_x \eta - \beta \frac{u^2}{h},$$

$$\partial_t z_b + \partial_x q_b = 0, \quad (q_b := q_b^*)$$

Adimensionnement des équations

échelles:

$$h, z_b, \eta \sim h_0, \quad u \sim u_0, \quad q_b \sim q_0, \quad \tau_b \sim f \rho_w u_0$$
$$x \sim l_0, \quad t \sim \frac{h_0 l_0}{q_0}, \quad \varepsilon = \frac{q_0}{h_0 u_0}, \quad F = \frac{u_0}{\sqrt{g h_0}}$$

équations adimensionnées

$$\varepsilon \partial_h + \partial_x (hu) = 0,$$

$$F^2 (\varepsilon \partial_t u + u \partial_x u) = -\partial_x \eta - \beta \frac{u^2}{h},$$

$$\partial_t z_b + \partial_x q_b = 0, \quad (q_b := q_b^*)$$

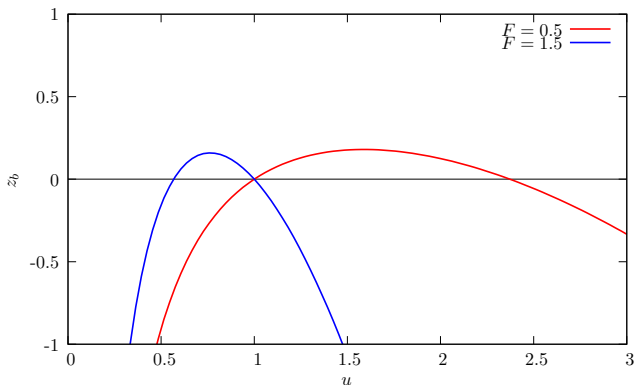
- $\varepsilon \ll 1$, $\beta = f \frac{l_0}{h_0} \ll 1 \Rightarrow$ lois de Bernoulli

$$hu = 1, \quad \frac{1}{2} F^2 u^2 + \eta = \frac{1}{2} F^2 + 1,$$

$$z_b = 1 - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} F^2 (1 - u^2)$$

Dune, anti-dune, instabilité

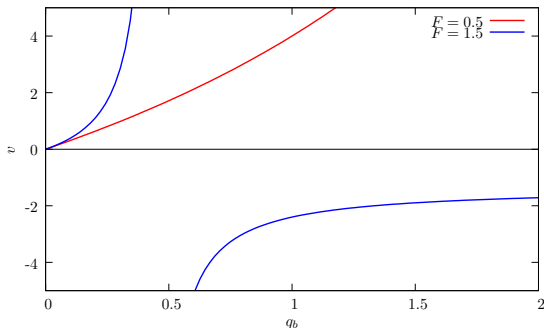
$$z_b = 1 - \frac{1}{u} + \frac{1}{2}F^2(1 - u^2)$$



Dune, anti-dune, instabilité

- équation d'Exner avec $q_b = q^* = u^3 \Rightarrow z_b = z_b(q_b)$

$$\partial_t z_b + \partial_x q_b = 0 \Rightarrow \begin{cases} \partial_t z_b + v \partial_x z_b = 0 \\ \partial_t q_b + v \partial_x q_b = 0, \\ v = q'_b(z_b) = \frac{1}{z'_b(q_b)} = \frac{3q_b^{4/3}}{1 - F^2 q_b} \end{cases}$$



Dune, anti-dune, instabilité

- équation d'Exner avec $q_b = q^* = u^3 \Rightarrow z_b = z_b(q_b)$

$$\partial_t z_b + \partial_x q_b = 0 \Rightarrow \begin{cases} \partial_t z_b + v \partial_x z_b = 0 \\ \partial_t q_b + v \partial_x q_b = 0, \\ v = q'_b(z_b) = \frac{1}{z'_b(q_b)} = \frac{3q_b^{4/3}}{1 - F^2 q_b} \end{cases}$$

- $F < 1$: dune
- $F > 1$: anti-dune
- mais pas des instabilités

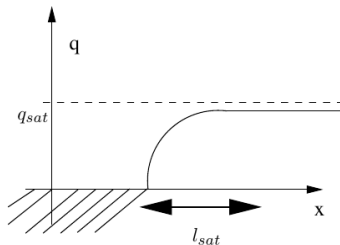
Dune, anti-dune, instabilité

complexifions le modèle du transport de sédiments

$$l_{sat} \partial_x q + q = q_{sat}$$

$$q_{sat} = q_b (\tau_b - \tau_c - \gamma \partial_x z_b)$$

$$\partial_t z_b + \partial_x q = 0$$



Dune, anti-dune, instabilité

complexifions le modèle du transport de sédiments

$$l_{sat} \partial_x q + q = q_{sat}$$

$$q_{sat} = q_b (\tau_b - \tau_c - \gamma \partial_x z_b)$$

$$\partial_t z_b + \partial_x q = 0$$

Pour $z_b \sim O(\epsilon)$, on obtient l'approximation

$$u = \frac{z_b}{1 - F^2}$$

Dune, anti-dune, instabilité

complexifions le modèle du transport de sédiments

$$\begin{aligned}l_{sat}\partial_x q + q &= q_{sat} \\ q_{sat} &= q_b(\tau_b - \tau_c - \gamma\partial_x z_b) \\ \partial_t z_b + \partial_x q &= 0\end{aligned}$$

Pour $z_b \sim O(\epsilon)$, on obtient l'approximation

$$u = \frac{z_b}{1 - F^2}$$

• $z_b = \bar{z}_b e^{\sigma t + i(\omega t - kx)}$, l'équation d'Exner donne (après l'adimensionnement)

$$\sigma + i\omega = \frac{1}{1 - ikl_{sat}^*} \left[\frac{3ik(1 - \tau_c)^{1/2}}{1 - F^2} - \frac{3\gamma k^2(1 - \tau_c)^{1/2}}{2} \right] \quad (\text{Kouakou, 2005})$$

⇒ pas des instabilités

Approches de type Navier-Stokes

équations adimensionnées de Navier-Stokes

$$\left. \begin{aligned} \partial_x u + \partial_z w &= 0 \\ u \partial_x u + w \partial_z u &= -\partial_x p + \frac{1}{Re} \nabla^2 u \\ u \partial_x w + w \partial_z w &= -\partial_z p + \frac{1}{Re} \nabla^2 w \end{aligned} \right| \quad + \text{CL}$$

et on calcule le frottement τ_b à partir de u

$$\tau_b = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=z_b}$$

\Rightarrow on s'intéresse au profil vertical de $u(z)$

Approches de type Navier-Stokes

équations adimensionnées de Navier-Stokes

$$\left. \begin{aligned} \partial_x u + \partial_z w &= 0 \\ u \partial_x u + w \partial_z u &= -\partial_x p + \frac{1}{Re} \nabla^2 u \\ u \partial_x w + w \partial_z w &= -\partial_z p + \frac{1}{Re} \nabla^2 w \end{aligned} \right| \quad + \text{CL}$$

et on calcule le frottement τ_b à partir de u

$$\tau_b = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=z_b}$$

⇒ on s'intéresse au profil vertical de $u(z)$

- analyse de stabilité: Colombini et al. (2004), Valence et al. (2005), etc

Approches de type Navier-Stokes simplifiée

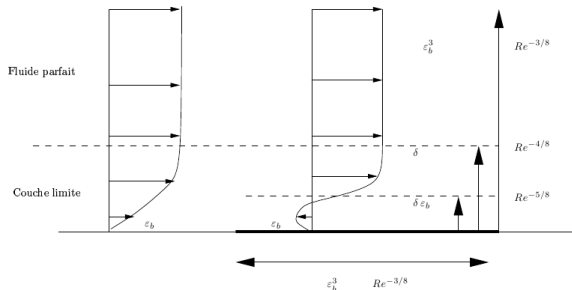
idée:

- on n'a pas forcément besoin de NS complète pour l'écoulement
- **mais** on veut avoir le “bon frottement“ au fond pour l'érosion

Approches de type Navier-Stokes simplifiée

idée:

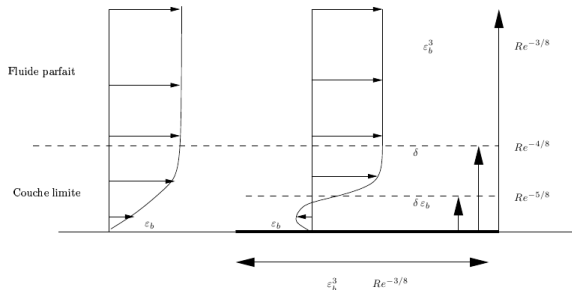
- on n'a pas forcément besoin de NS complète pour l'écoulement
- **mais** on veut avoir le "bon frottement" au fond pour l'érosion
- ① modèles du type double, triple couche (Neiland, (1969), Stewartson (1969), Smith (1980), Lagrée (2003))



Approches de type Navier-Stokes simplifiée

idée:

- on n'a pas forcément besoin de NS complète pour l'écoulement
- **mais** on veut avoir le "bon frottement" au fond pour l'érosion
- ① modèles du type double, triple couche (Neiland, (1969), Stewartson (1969), Smith (1980), Lagrée (2003))

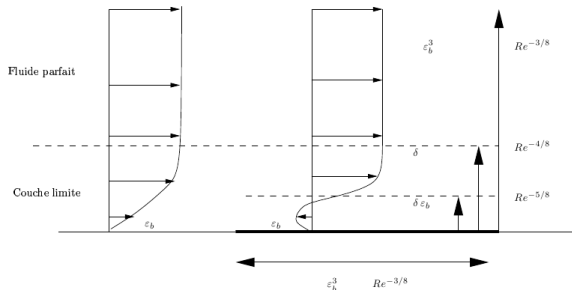


- ② modèle St Venant multi-couche (Audusse, 2012)

Approches de type Navier-Stokes simplifiée

idée:

- on n'a pas forcément besoin de NS complète pour l'écoulement
- **mais** on veut avoir le "bon frottement" au fond pour l'érosion
- ① modèles du type double, triple couche (Neiland, (1969), Stewartson (1969), Smith (1980), Lagrée (2003))



- ② modèle St Venant multi-couche (Audusse, 2012)
- ③ modèle St Venant avec couche limite ?

Merci!